МАТЕМАТИКА.

ЧАСТЬ I.

АРИѲМЕТИКА

Академика В. Я. Буняковскаго.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

ВЪ ТИПОГРАФІИ ВОЕННО-УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ.

1849.

Утверждено ЕГО ИМПЕРАТОРСКИМЪ ВЫСОЧЕСТВОМЪ Главнымъ Начальникомъ Военно-Учебныхъ Заведеній.

Начальникъ Штаба *Генералъ-Адъютантъ Ростовцовъ*.

2 Іюля 1849 года.



АРИѲМЕТИКА.

Съ одобренія Императорской Академіи Наукъ.
Въ Іюнѣ 1849 года.

П. Фусъ
Непремѣнный Секретарь.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ПРЕДЪУВѢДОМЛЕНІЕ.

Въ 1844 году напечатанъ мною Курсъ Ариѳметики, допущенный Департаментомъ Народнаго Просвѣщенія къ употребленію въ Гимназіяхъ. Предлагаемое нынѣ Руководство, хотя и согласное въ главныхъ чертахъ съ первымъ изданіемъ, отличается однакожъ отъ него во многихъ мѣстахъ подробностями изложенія, упрощенными способами въ доказательствѣ нѣкоторыхъ Предложеній, и даже, частію, въ самомъ порядкѣ статей. Въ новое изданіе не вошли *пропорціи* потому что онѣ, по утвержденнымъ Программамъ, отнесены теперь къ Алгебрѣ. *Тройныя правила*, какъ основанныя на пропорціяхъ, также выпущены. Исключеніе этихъ статей изъ Ариѳметики вполнѣ оправдывается ея сущностію: дѣйствительно, рѣшеніе вопросовъ, приводящихъ къ различнымъ видамъ тройныхъ правилъ, требуетъ составленія равенствъ, заключающихъ въ себѣ данныя величины въ совокупленіи съ неизвѣстными; по этой причинѣ общіе пріёмы, служащіе для опредѣленія сихъ неизвѣстныхъ, должны

быть естественнымъ образомъ отнесены къ Алгебрѣ, а не къ Ариѳметикѣ, имѣющей предметомъ только исполненіе дѣйствій, уже указанныхъ.

Впрочемъ, въ замѣнъ этихъ оговоренныхъ пропусковъ, въ новомъ Руководствѣ усилена *практическая* часть Ариѳметики подробнымъ разборомъ и рѣшеніемъ довольно значительнаго числа разнообразныхъ вопросовъ; это самое должно послужить къ развитію въ воспитанникахъ способности соображенія съ бóльшими ручательствами за успѣхъ, чѣмъ наборъ разныхъ правилъ, которыми совершенно безполезно обременять ихъ память.

Прибавленія къ новому изданію содержатъ въ себѣ понятія о различныхъ системахъ счисленія, нѣкоторыя изслѣдованія о дѣлимости чиселъ и подробности о свойствахъ періодическихъ десятичныхъ дробей (*).

Благопріятныя обстоятельства, при которыхъ предпринято это новое изданіе, удостовѣряютъ меня, что въ немъ найдутъ значительныя улучшенія противъ прежняго. И во первыхъ, при настоящемъ трудѣ, я могъ сообразоваться съ *Наставленіемъ для образованія воспитанниковъ Военно-Учебныхъ Заведеній*, въ которомъ, съ полною опредѣлительностію, обозначены

(*) Подробности, напечатанныя мелкимъ шрифтомъ въ текстѣ этихъ *Прибавленій*, заключаютъ въ себѣ болѣе занимательнаго, чѣмъ необходимаго въ преподаваніи Ариѳметики; поэтому онѣ могутъ быть выпущены, безъ ущерба для науки.

главныя педагогическія условія для успѣшнаго преподаванія; въ томъ же *Наставленіи* разобранъ необходимый вопросъ объ относительной соразмѣрности между объёмами теоретической и практической части каждой науки, и показано направленіе и самый духъ, въ какомъ вообще Руководства должны быть написаны. Съ другой стороны, какъ Членъ Спеціальной Коммиссіи по предмету Математическихъ Наукъ, я имѣлъ случай представить на судъ ея Членовъ подробный *Конспектъ Ариѳметики* (*), предварительно написанный мною по Программѣ, уже прежде разсмотрѣнной и утвержденной Коммиссіею. Обстоятельное, въ возможной мѣрѣ совѣстливое обсужденіе этого пріуготовительнаго труда, доставило мнѣ много полезныхъ замѣчаній, которыми я тщательно старался воспользоваться при составленіи новаго Руководства. Считаю пріятною обязанностію изъявить искреннюю мою признательность Гг. Членамъ за такое ихъ содѣйствіе, и въ особенности, достойному Руководителю всѣхъ трудовъ Математической Коммиссіи, Г. Академику М. В. Остроградскому.

(*) Этотъ Конспектъ, съ Программою Ариѳметики, напечатанъ отдѣльно.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЯ ПОНЯТІЯ.

§ 1. Всякій имѣетъ понятіе о томъ, какъ измѣрить длину, взвѣсить товаръ, сосчитать деньги. Для измѣренія длины употребляютъ какую нибудь извѣстную мѣру, напримѣръ сажень, аршинъ и проч. Товаръ взвѣшиваютъ на вѣсахъ посредствомъ пудовыхъ, фунтовыхъ гирь, или золотниковъ. Деньги считаютъ рублями, гривнами, копѣйками. Мѣра, которую употребляютъ для опредѣленія длины, вѣса, денежной суммы и проч., называется *именованною единицею*, потому что она всегда имѣетъ особое *наименованіе*. Такъ напримѣръ, если бы мѣрили аршиномъ, взвѣшивали на фунты, считали деньги рублями, то *аршинъ*, *фунтъ*, *рубль* изображали бы *именованныя единицы*.

§ 2. Именованная единица при одномъ и томъ же дѣйствіи, какъ при счётѣ денегъ, при расчисленіи времени и проч., не всегда бываетъ одинакова. Деньги можно считать копѣйками, рублями, или иначе. Въ первомъ случаѣ именованная единица будетъ *копѣйка*, а во второмъ *рубль*. При счисленіи времени можно употреблять часы, сутки, недѣли и проч., смотря по чему именованною единицею будетъ *часъ*, *сутки*, *недѣля* и проч.

§ 3. Повтореніе нѣсколькихъ именованныхъ единицъ называется *цѣлымъ именованнымъ числомъ*; напримѣръ *пятьдесятъ аршинъ*. Равнымъ образомъ, одна именованная единица можетъ означать именованное число въ разсужденіи другой, мѐньшей единицы; такъ, при счётѣ денегъ, когда принимаемъ копѣйку за именованную единицу, одинъ рубль будетъ *цѣлымъ имено-*

ваннымъ числомъ, потому что онъ содержитъ въ себѣ сто такихъ единицъ; также пудъ, при взвѣшиваніи на фунты, есть *цѣлое именованное число* по той причинѣ, что состоитъ изъ совокупности сорока фунтовъ.

§ 4. Нерѣдко случается, что употребляемая именованная единица оказывается слишкомъ значительной. Напримѣръ, желая смѣрить аршиномъ длину листа бумаги, находимъ, что эта длина составляетъ девять вершковъ, то есть не полный аршинъ, а только нѣкоторую часть его. Тò же самое можетъ случиться и со всякою другою именованною единицею. Часть именованной единицы, какъ найденные выше девять вершковъ или двѣ четверти съ вершкомъ, называется *дробнымъ именованнымъ числомъ*, или, проще, *именованною дробью.* Равнымъ образомъ, еслибъ условились считать деньги *рублями*, то всякая сумма, мѐньшая рубля, состоящая изъ гривенъ и копѣекъ, была бы *именованною дробью.*

§ 5. *Смѣшанною именованною дробью* называется соединеніе цѣлаго именованнаго числа съ именованною дробью. Такъ напримѣръ *пять рублей двадцать три копѣйки* будетъ *смѣшанною именованною дробью*, когда примемъ *рубль* за единицу.

§ 6. *Всё, что̀ можно представить себѣ бо̀льшимъ или мѐньшимъ, называется* величиною. Длина, вѣсъ, время, сумма денегъ и множество другихъ предметовъ, которые можемъ вообразить, суть *величины*, потому что длина, вѣсъ, время, сумма денегъ и проч. не всегда бываютъ одинаковы: иногда больше, а иногда меньше. И въ самомъ дѣлѣ, случается мѣрить длину и въ нѣсколько саженъ, и въ нѣсколько вершковъ, или взвѣшивать значительную тяжесть на пуды, а въ другой разъ легкую вещь на золотники, считать деньги сотнями рублей, или даже тысячами, а въ иныхъ случаяхъ и копѣйками.

Всякую величину можно представить себѣ состоящею изъ частей; дѣйствительно, еслибъ разсматривалось, положимъ, ка-

кое нибудь протяженіе въ длину, или время и проч., то можно бы было вообразить, что это протяженіе раздѣлено на части, время на промежутки и проч.

§ 7. Когда мѣримъ какую нибудь длину, или взвѣшиваемъ вещь, или считаемъ деньги, то при этомъ видимъ *повтореніе* именованной единицы. Положимъ, напримѣръ, что по длинѣ, которую желаемъ измѣрить, *аршинъ* помѣстился *семь* разъ, что вещь вѣситъ *семь* фунтовъ, денегъ сосчитали *семь* рублей; именованная единица, — въ первомъ случаѣ *аршинъ*, во второмъ *фунтъ*, а въ третьемъ *рубль*, — повторилась *семь* разъ при каждомъ изъ трехъ дѣйствій. Ежели же скажемъ просто, что измѣряя нѣкоторую величину, именованная единица повторилась *семь* разъ, не говоря какая это именно единица, аршинъ-ли, фунтъ или рубль, то *семь* не будетъ уже *именованнымъ числомъ*; въ самомъ дѣлѣ, это число *семь* не имѣетъ здѣсь никакого *наименованія*, потому что родъ измѣряемой величины совершенно произвольный. Въ такомъ случаѣ *семь* называется *отвлеченнымъ цѣлымъ числомъ*.

Когда именованная единица заключается ровно *одинъ разъ* въ измѣряемой величинѣ, то подъ однимъ разомъ должно разумѣть *отвлеченную единицу*. Повтореніе нѣсколькихъ отвлеченныхъ единицъ составляетъ *отвлеченное цѣлое число*.

§ 8. *Отвлеченною дробью* называется часть отвлеченной единицы. Вообще, подъ *отвлеченнымъ числомъ*, или просто *числомъ*, разумѣемъ всякую величину, составленную или изъ цѣлыхъ отвлеченныхъ единицъ, или изъ частей этой единицы, или еще изъ совокупности цѣлыхъ единицъ съ ея частями. Поэтому, когда не называя рода единицъ говоримъ: *два*, *пять*, *семь разъ*, *три четверти* и проч., то употребляемъ *отвлеченныя числа*. Напротивъ того, если скажемъ: *два пуда*, *пять аршинъ*, *семь дней*, *три четверти фунта* и проч., то эти самыя числа будутъ *именованныя*.

§ 9. Впрочемъ, понятіе объ отвлеченномъ числѣ получается также и независимо отъ именованныхъ чиселъ. Всякій умѣетъ считать предметы, если только ихъ немного; такъ считая что̀ бы то̀ ни было, рубли, копѣйки, дни, аршины, или даже вещи различныя между собой, мы всегда поступаемъ одинаковымъ образомъ. Въ самомъ дѣлѣ, желая узнать сколько разъ повторяются какія нибудь предметы, мы указываемъ на каждый изъ нихъ, или откладываемъ по одному въ сторону, и говоримъ: разъ, два, три, четыре и такъ далѣе, не называя даже ихъ. Подобнымъ образомъ, имѣя, напримѣръ, съ одной стороны *пять* рублей, а съ другой *два* рубля, или отсчитавъ сперва *пять* какихъ нибудь вещей, а потомъ *двѣ*, говоримъ въ томъ и другомъ случаѣ: *пять*, да *два*, *семь*, и подъ *семью* разумѣемъ совокупность семи единицъ, какія бы онѣ не были, одинаковыя или различныя между собой. Отсюда видимъ, что при всякомъ счётѣ, можно употреблять числа безъ наименованія рода единицъ. Эти числа мы назвали сей-часъ *отвлеченными*. Повторяемъ, что̀бы мы не считали, и какъ бы не считали, всегда можемъ употреблять при этомъ одни только *отвлеченныя числа*.

§ 10. Всё что̀ дѣлается посредствомъ чиселъ, то есть всякіе численные пріёмы, называются *выкладками* или *дѣйствіями*. Напримѣръ, когда къ *пяти* прибавили *два*, и нашли число *семь*, то сдѣлали *выкладку* или произвели *дѣйствіе*. Здѣсь число *семь* найдено очень просто: но чаще случается, что числа бываютъ значительнѣе, и требованія болѣе сложны; тогда выкладки становятся труднѣе. Для производства ихъ, прежде всего надобно знать какъ произносить и писать числа, а потомъ уже какъ совершать надъ ними различныя дѣйствія; этому научаетъ насъ *Ариѳметика*. И такъ, ***Ариѳметика есть наука, въ которой предлагаются правила для произношенія всякихъ чиселъ, для изображенія ихъ приличными знаками,***

и наконецъ для производства надъ ними различныхъ выкладокъ или дѣйствій.

Сей-часъ было замѣчено, что дѣйствія надъ числами именованными, какого бы они рода не были, всегда приводятся къ дѣйствіямъ надъ числами отвлеченными, которыми, поэтому, и слѣдуетъ прежде всего заняться.

ОТДѢЛЪ I.

Счисленіе.

§ 11. Мы видѣли, что отъ повторенія единицъ происходятъ всѣ цѣлыя числа. Если къ одной единицѣ придадимъ еще единицу, то получимъ *двѣ единицы*, или, проще, *два*; присовокупленіе единицы къ двумъ, дастъ *три единицы*, или число *три*, тамъ *четыре*, *пять*, *шесть* и проч. Такимъ образомъ прибавляя по единицѣ къ каждому вновь получаемому цѣлому числу, эти числа будутъ становиться всё болѣе и болѣе значительными; подъ конецъ ихъ накопится такъ много, что нельзя уже будетъ каждому дать особое названіе, а тѣмъ менѣе всѣ придуманныя названія удержать въ памяти. Столько же неудобно изображать на письмѣ каждое число особымъ знàкомъ, потому что упомнить такое множество знаковъ нетолько весьма трудно, но даже невозможно. При такомъ затрудненіи надобно было искать простѣйшаго средства для словеснаго и письменнаго выраженія чиселъ, какъ бы они велики не были. На этотъ конецъ придуманъ весьма легкій и удобный способъ, извѣстный подъ названіемъ *десятичнаго счисленія*, которое употребляется теперь всѣми образованными народами. Объяснимъ подробно въ чёмъ состоитъ этотъ способъ.

§ 12. Для изображенія первыхъ девяти цѣлыхъ чиселъ употребляются слѣдующіе знаки, называемые *цифрами*:

Единицу или одинъ изображаютъ цифрою 1
Два 2

Три.. 3
Четыре...................................... 4
Пять... 5
Шесть 6
Семь... 7
Восемь 8
Девять...................................... 9.

§ 13. Если къ *девяти* прибавимъ единицу, то получимъ *десять отвлеченныхъ единицъ*, или число *десять*, которое, въ свою очередь, принимаемъ за новую единицу, какъ напримѣръ считая *копѣйки*, можно принять *гривну*, заключающую въ себѣ десять копѣекъ, за новую именованную единицу. Чтобъ отличить новую отвлеченную единицу отъ прежней, назовемъ её *единицею втораго разряда*, и изобразимъ двумя знаками: 10. Знакъ 0, который произносится *нуль*, не означаетъ самъ по себѣ никакого числа, а ставится по правую сторону цифры 1 для того, чтобы не смѣшивать единицы втораго разряда, то есть числа *десять*, съ *простою единицею*, или съ 1. Совокупность *двухъ десятковъ* составитъ двѣ единицы втораго разряда, или число *двадцать*, которое пишется такъ: 20. *Три десятка* или *тридцать* изображаютъ чрезъ 30, и такъ далѣе, какъ слѣдуетъ ниже:

Одинъ десятокъ или десять пишется 10
Два десятка или двадцать.............. 20
Тридцать.................................... 30
Сорокъ...................................... 40
Пятьдесятъ................................ 50
Шестьдесятъ.............................. 60
Семьдесятъ............................... 70
Восемьдесятъ............................ 80
Девяносто .... 90.

Изъ числа показанныхъ десяти знаковъ

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0,

первые девять называются иногда *значащими цифрами* въ противоположность *нулю* (0), который самъ по себѣ не означаетъ никакого числа.

Посредствомъ этихъ *десяти* знаковъ изображаются числа, какъ бы они велики не были; вотъ почему самое счисленіе называется *десятичнымъ*. Въ этомъ способѣ мы усматриваемъ большое сходство съ обыкновеннымъ письмомъ, въ которомъ, посредствомъ небольшаго числа буквъ азбуки, можемъ написать всѣ слова, не смотря на чрезвычайное ихъ множество.

§ 14. Когда къ *девяти десяткамъ*, то есть къ 90, придадимъ еще одинъ десятокъ, то получимъ *десять десятковъ* или *сто*. *Сто* принимаютъ за *единицу третьяго разряда*, точно такъ какъ считая, напримѣръ деньги, *копѣйками*, дошли бы сперва до десяти копѣекъ или до *гривны*, а потомъ до ста копѣекъ или до *рубля*. Въ такомъ случаѣ можно бы принять *копѣйку* за именованную единицу *перваго* разряда, *гривну*, за единицу *втораго* разряда, а *рубль*, за единицу *третьяго* разряда. Отвлеченное число *сто*, или *единицу третьяго разряда*, изображаютъ такъ: 100. Двѣ такія единицы, то есть число *двѣсти*, означаютъ чрезъ 200, три единицы или *триста*, чрезъ 300, и такъ далѣе до девяти единицъ третьяго разряда, какъ показано ниже: *сто* 100; *двѣсти* 200; *триста* 300; *четыреста* 400; *пять сотъ* 500; *шесть сотъ* 600; *семь сотъ* 700; *восемь сотъ* 800; *девять сотъ* 900.

§ 15. Подобнымъ образомъ, если къ *девяти сотнямъ* прибавимъ одну сотню, то получимъ *единицу четвертаго разряда*, которую называютъ *тысячею*, и означаютъ чрезъ 1000. *Двѣ тысячи* пишутъ: 2000; *три тысячи* 3000, и такъ далѣе до *девяти тысячъ*: 9000. Далѣе, считаютъ *десять тысячъ*: 10000; *сто тысячъ*: 100000; но вмѣсто *тысячи тысячъ*, означаемыхъ

чрезъ 1000000, употребляютъ названіе *милліонъ*; къ милліонамъ принадлежатъ слѣдующіе *три* разряда: *милліонъ*, 1000000; *десять милліоновъ*, 10000000; *сто милліоновъ*, 100000000. Вмѣсто *тысячи миллюновъ*, означаемыхъ чрезъ 1000000000, употребляютъ названіе *билліонъ*, который составляетъ новую единицу; билліоны считаются точно такъ какъ милліоны, и заключаютъ въ себѣ также три разряда, именно: *билліонъ, десять билліоновъ* и *сто билліоновъ*. Билліонъ, какъ мы сей-часъ видѣли, изображается единицею съ *девятью* нулями съ правой стороны; во второмъ разрядѣ билліоновъ будетъ *десять* нулей, а въ третьемъ *одиннадцать*. За билліонами слѣдуютъ *триллiоны, квадрилліоны, квинтилліоны* и проч., и каждый изъ нихъ заключаетъ въ себѣ, подобно милліону, по *три* разряда.

Единицы, тысячи, милліоны, билліоны, трилліоны и проч. называются *классами*; каждый классъ заключаетъ въ себѣ *три разряда*, именно: *единицы*, *десятки* и *сотни*.

§ 16. Затвердивъ названія и порядокъ различныхъ классовъ и разрядовъ, очень легко будетъ выговаривать числа написанныя, а также изображать цифрами числа, заданныя на словахъ. Такъ какъ всякій классъ заключаетъ въ себѣ три разряда, то прежде всего должно умѣть произносить и писать безошибочно числа о *трехъ* цифрахъ, къ какому бы классу они не принадлежали. Напримѣръ, число 238 произносится *двѣсти тридцать восемь*; если припишемъ къ нему съ правой стороны три нуля, то получимъ 238000, то есть число, принадлежащее уже къ классу *тысячь*, почему оно и выговаривается *двѣсти тридцать восемь тысячь*; прибавивъ еще три нуля, найдемъ число 238000000, относящееся къ классу *милліоновъ*, и которое поэтому должно произносить *двѣсти тридцать восемь милліоновъ* и такъ далѣе.

Если случится, что въ написанномъ классѣ на мѣстѣ какого либо разряда стоитъ нуль, то, читая число, слѣдуетъ

пропустить этотъ разрядъ. Напримѣръ, число 203000 читается такъ: *двѣсти три тысячи*, то есть, выговариваемъ сперва *сотни тысячь*, пропускаемъ *десятки тысячь*, которыхъ нѣтъ въ данномъ числѣ, ибо на ихъ мѣстѣ стоитъ нуль, и окончательно произносимъ *единицы тысячь*.

§ 17. Послѣ этихъ объясненій, очень легко изображать числа, заданныя на словахъ. Для этого слѣдуетъ писать по порядку, отъ лѣвой руки къ правой, цифры, означающія число единицъ каждаго разряда, начиная съ высшихъ классовъ. Положимъ, напримѣръ, что желаемъ написать *семь тысячь восемь сотъ пятьдесятъ шесть*. Такъ какъ это число состоитъ изъ *семи тысячь*, которыя изображаются чрезъ 7000, *восьми сотень*: 800, *пяти десятковъ*: 50, и *шести* простыхъ единицъ: 6, то данное число напишется слѣдующимъ образомъ: 7856. Дѣйствительно, перечитывая цифры отъ правой руки къ лѣвой, находимъ на первомъ мѣстѣ 6 простыхъ единицъ, на второмъ 5 десятковъ или 50, на третьемъ 8 сотень или 800, и наконецъ, на послѣднемъ мѣстѣ, 7 тысячь или 7000; совокупность всѣхъ этихъ отдѣльныхъ чиселъ составитъ тò число, которое требовалось изобразить цифрами.

Если бы въ числѣ, заданномъ на словахъ, недоставало одного или нѣсколькихъ разрядовъ, или даже цѣлыхъ классовъ, то на мѣстѣ каждаго недостающаго разряда слѣдовало бы написать *нуль*. Напримѣръ: *два милліона пять сотъ четыре тысячи восемь* должно написать слѣдующимъ образомъ: 2504008, потому что въ заданномъ числѣ нѣтъ ни *десятковъ*, ни *сотень*, ни *десятковъ тысячь*.

Вообще, когда имѣемъ число, состоящее изъ нѣсколькихъ классовъ, то должно раздѣлить его, начиная отъ правой руки къ лѣвой на грани по *три* цифры, при чёмъ можетъ случиться, что послѣдняя грань будетъ заключать менѣе трехъ цифръ. Такимъ образомъ всякое число разложится на трехъ-

разрядныя грани, или на классы. Послѣ того, замѣтивъ, что первая грань, съ правой стороны, принадлежитъ *единицамъ*, вторая *тысячамъ*, третья *милліонамъ*, четвертая *билліонамъ* и такъ далѣе, выговариваемъ по порядку каждую грань, начиная уже отъ лѣвой руки, и прибавляя къ каждой изъ нихъ ея наименованіе. И такъ, число

15463910806315,

изъ котораго выходитъ *пять* граней

трил.	бил.	мил.	тыс.	един.
15	463	910	806	315,

выговаривается слѣдующимъ образомъ:

15 трилліоновъ
463 билліона
910 милліоновъ
806 тысячь
315 единицъ.

Каждая же изъ этихъ пяти граней читается какъ было уже объяснено прежде.

§ 18. Принятыя въ десятичномъ счисленіи цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и знакъ 0 (нуль) называются *Арабскими*, потому что онѣ заимствованы отъ Аравитянъ.

Кромѣ *Арабскихъ цифръ* употребляются для счисленія многіе другіе знаки. Употребительнѣйшіе изъ нихъ въ общежитіи суть *Римскія цифры*, которыя показаны въ Отдѣлѣ IX; тамъ же объяснено употребленіе *Славянскаго* алфавита для счисленія.

Объяснивъ изустное и письменное счисленіе, переходимъ къ правиламъ, по которымъ производятся различныя выкладки или дѣйствія надъ цѣлыми числами. Главныхъ ариѳметическихъ дѣйствій *четыре*: *сложеніе*, *вычитаніе*, *умноженіе* и *дѣленіе*; мы назовемъ ихъ *основными*, потому что всѣ другія выкладки основаны на нихъ.

ОТДѢЛЪ II.

Четыре основныя дѣйствія надъ цѣлыми числами.

О сложеніи цѣлыхъ чиселъ.

§ 19. *Сложеніе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго соединяемъ нѣсколько данныхъ чиселъ въ одно цѣлое, называемое суммою.* Числа, которыя желаемъ сложить, называются *слагаемыми.*

§ 20. Когда изъ двухъ слагаемыхъ ни одно не болѣе 9, то для ихъ сложенія не требуется никакого особеннаго правила, а нуженъ только навыкъ. Напримѣръ, чтобы найти сумму чиселъ 2, 3, 4 и 9, говоримъ: 2 и 3, 5 и 4, 9 и 9, 18. Поэтому надобно твердо знать наизустъ суммы двухъ какихъ ни есть изъ первыхъ девяти чиселъ.

§ 21. Если же слагаемыя числа состоятъ изъ нѣсколькихъ цифръ, то для ихъ сложенія должно поступать по слѣдующему правилу: написать эти числа такъ, чтобы ихъ простыя единицы были однѣ подъ другими, чтобы десятки стояли подъ десятками, сотни подъ сотнями, тысячи подъ тысячами и такъ далѣе. Когда данныя числа будутъ написаны такимъ образомъ, то подъ послѣднимъ слагаемымъ числомъ проводимъ черту; потомъ складываемъ простыя единицы, то есть цифры, находящіяся въ первомъ столбцѣ съ правой стороны. Если эта сумма не будетъ болѣе 9, то пишемъ её подъ чертою, противъ простыхъ единицъ; если же она болѣе 9, то, противъ простыхъ единицъ, подъ чертою, ставимъ единицы той суммы, а десятки придаемъ къ цифрамъ слѣдующаго столбца, то есть втораго, считая отъ правой руки. Точно такимъ образомъ поступаемъ со вторымъ столбцомъ, не забывая приписанныхъ десятковъ, а равно съ третьимъ и дальнѣйшими; когда же дойдемъ до послѣдняго, то пишемъ всю сумму, сколько бы въ ней цифръ не было.

Примѣръ. Сложить числа 7835, 746, 59, 9280 и 3681.

Располагаемъ данныя числа въ видѣ

Слагаемыя числа:	7835
	746
	59
	9280
	3681
Сумма:	21601

и производимъ сложенiе слѣдующимъ образомъ: начиная складывать цифры перваго столбца съ правой стороны, говоримъ: 5 и 6, 11 и 9, 20 и 1, 21; пишемъ простую единицу подъ чертою противъ простыхъ же единицъ слагаемыхъ чиселъ, а 2 десятка придаемъ къ цифрамъ втораго столбца, которыя складываемъ точно такъ же, говоря: 2 и 3, 5 и 4, 9 и 5, 14 и 8, 22 и еще 8, 30. Пишемъ 0 десятковъ на второмъ мѣстѣ подъ чертою, а 3 сотни удерживаемъ въ умѣ, и придаемъ къ цифрамъ третьяго столбца, для котораго будетъ: 3 и 8, 11 и 7, 18 и 2, 20 и 6, 26; пишемъ 6 подъ сотнями слагаемыхъ, а 2 тысячи придаемъ къ цифрамъ четвертаго столбца, говоря: 2 и 7, 9 и 9, 18 и 3, 21; эту послѣднюю сумму пишемъ сполна такъ, чтобы 1 находилась подъ тысячами слагаемыхъ, и получаемъ наконецъ искомую сумму 21601.

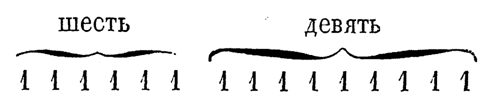
Прiобрѣтя достаточный навыкъ въ сложенiи, можно, для краткости рѣчи, не называть двухъ слагаемыхъ цифръ, а прямо произносить имъ сумму. Такъ въ предъидущемъ примѣрѣ, вмѣсто того чтобъ говорить: 5 и 6, 11 и 9, 20 и 1, 21, прямо произносимъ суммы 11, 20, 21; для втораго столбца говоримъ только: 5, 9, 14, 22, 30; для третьяго: 11, 18, 20, 26; для четвертаго: 9, 18, 21; здѣсь сложенiе кончено, и получаемъ прежнюю сумму 21601.

§ 22. Если заданныхъ для сложенія чиселъ довольно много, то для облегченія дѣйствія можно поступать слѣдующимъ образомъ: сложить сперва нѣсколько изъ данныхъ чиселъ, напримѣръ пять; подъ ихъ суммою написать слѣдующія четыре слагаемыя числа; найдя сумму этихъ пяти чиселъ, подписываютъ опять подъ нею четыре изъ остающихся чиселъ, и опять берутъ сумму; такимъ образомъ доходятъ до послѣдняго изъ заданныхъ чиселъ, и опредѣляютъ искомую сумму.

Напримѣръ, пусть даны для сложенія 15 чиселъ: 365, 836, 1023, 86, 3699, 883, 13682, 375, 878, 1234, 135, 125, 46785, 3601 и 1838. Располагаемъ дѣйствіе слѣдующимъ образомъ:

Первыя 5 слагаемыхъ чиселъ:	365
	836
	1023
	86
	3699
1-я сумма:	6009
Слѣдующія числа:	883
	13682
	375
	878
2-я сумма:	21827
Слѣдующія числа:	1234
	135
	125
	46785
3-я сумма:	70106
Остальныя 2 числа:	3601
	1838
Искомая сумма:	75545

§ 23. Необходимо замѣтить, что въ какомъ бы порядкѣ не складывались данныя числа, окончательная сумма ихъ будетъ всегда одна и та же. Возьмемъ, напримѣръ, два числа 6 и 9; разложимъ ихъ на единицы, которыя напишемъ рядомъ въ слѣдующемъ видѣ:



если будемъ считать эти единицы отъ лѣвой руки къ правой, то получимъ сумму 6 и 9, т. е. 15; считая же ихъ отъ правой руки къ лѣвой, порядокъ слагаемыхъ будетъ 9 и 6, при чёмъ число единицъ не перемѣняется. Слѣдовательно 9 и 6, равно какъ 6 и 9, составятъ одну и ту же сумму 15. Ясно, что и для всякихъ другихъ слагаемыхъ, въ какомъ бы порядкѣ сложеніе не производилось, сумма останется всегда одинаковою.

§ 24. Чтобы *повѣрить* сложеніе, то есть, чтобъ узнать нѣтъ-ли ошибки въ вычисленіи, можно складывать цифры столбцовъ начиная снизу; если новое сложеніе произведено безошибочно, и полученная сумма равна прежденайденной, то и первое сложеніе сдѣлано вѣрно. Вмѣсто того, чтобы складывать цифры столбцовъ начиная снизу, можно писать слагаемыя числа въ какомъ ни естъ другомъ порядкѣ. Показанная *повѣрка сложенія* объясняется тѣмъ, что̀ сказано сей-часъ (§ 23) о произвольномъ порядкѣ слагаемыхъ.

§ 25. Задача. *Пять купцовъ, для нѣкотораго торговаго оборота, составили капиталъ: одинъ внесъ 2356 рублей; другой 3679 р.; третій 10831 р.; четвертый 56825 р. и наконецъ пятый 34749 рублей. Спрашивается, какъ великъ общій капиталъ?*

Такъ какъ въ этой задачѣ требуется узнать, сколько составляютъ извѣстныя денежныя суммы, взятыя вмѣстѣ, то и скла-

дываемъ числа: 2356, 3679, 10831, 56825 и 34749. Сумма ихъ 108440 изобразитъ число рублей общаго капитала.

О вычитаніи цѣлыхъ чиселъ.

§ 26. ***Вычитаніе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго отнимаемъ отъ бо̀льшаго числа другое, мѐньшее число.*** Такъ вычтя 4 изъ 9, получимъ 5. Бо̀льшее изъ двухъ данныхъ чиселъ (въ этомъ примѣрѣ 9) называется *уменьшаемымъ*, мѐньшее (4 въ томъ же примѣрѣ), *вычитаемымъ*, и наконецъ искомое число (то есть 5), *разностью* или *остаткомъ*.

Прежде всего должно упражняться въ вычитаніи небольшихъ чиселъ, и знать наизустъ ихъ разности; вытвердить это нетрудно тому, кто привыкъ къ сложеніямъ. Въ самомъ дѣлѣ, искомая разность будетъ то̀ самое число, которое должно придать къ вычитаемому, чтобъ получить уменьшаемое. Напримѣръ, вычесть 7 изъ 12 значитъ найти такое число, которое, вмѣстѣ съ 7, составляло бы 12; такъ какъ 5 и 7 равно 12, то и заключаемъ, что искомая разность между 12 и 7 есть 5. Такъ же найдемъ что 13 безъ 9, 4, 11 безъ 5, 6 и проч.

§ 27. Чтобы вычесть число, состоящее изъ нѣсколькихъ цифръ изъ другаго, подписываемъ сперва мѐньшее подъ бо̀льшимъ такъ, чтобы простыя единицы вычитаемаго находились подъ простыми единицами уменьшаемаго, десятки подъ десятками, сотни подъ сотнями и такъ далѣе; потомъ проводимъ черту подъ вычитаемымъ числомъ. Если цифры всѣхъ разрядовъ уменьшаемаго не менѣе соотвѣтственныхъ имъ цифръ вычитаемаго, то вычитаемъ по порядку каждую нижнюю цифру изъ соотвѣтствующей ей верхней, начиная дѣйствіе отъ правой руки. Можетъ также случиться, что бо̀льшее число заключаетъ въ себѣ болѣе цифръ, нежели мѐньшее; тогда къ найденной разности приписываемъ съ лѣвой стороны тѣ лишнія цифры. Вотъ два примѣра, которые пояснятъ сказанное:

Изъ	82436	Изъ	35608
вычесть	61423	вычесть	405
Разность:	21013	Разность:	35203

Въ первомъ примѣрѣ говоримъ: 3 изъ 6, 3, пишемъ 3 подъ единицами; 2 изъ 3, 1, пишемъ 1 подъ десятками; 4 изъ 4, 0, пишемъ 0 подъ сотнями; 1 изъ 2, 1, пишемъ 1 подъ тысячами; наконецъ, 6 изъ 8, 2, пишемъ 2 подъ десятками тысячь, и получаемъ искомую разность 21013.

Во второмъ примѣрѣ: 5 изъ 8, 3, пишемъ 3 подъ единицами; 0 изъ 0, 0, пишемъ 0 подъ десятками; 4 изъ 6, 2, пишемъ 2 подъ сотнями. Далѣе, какъ вычитаемое число не заключаетъ въ себѣ ни тысячь, ни десятковъ тысячь, то изъ 35 тысячь уменьшаемаго числа ничего и не придется вычесть, почему эти 35 тысячь и останутся въ разности. И такъ, приписавъ 35 съ лѣвой стороны 203-хъ, получимъ искомую разность 35203.

§ 28. Въ обоихъ этихъ примѣрахъ цифры вычитаемаго были менѣе соотвѣтствующихъ имъ цифръ уменьшаемаго; но часто случается, что нѣкоторыя цифры уменьшаемаго меньше соотвѣтствующихъ имъ цифръ вычитаемаго. Напримѣръ, если бы требовалось вычесть 48 изъ 65, то, по объясненному сей-часъ правилу, слѣдовало бы вычесть 8 изъ 5, что̀ невозможно. Въ этомъ случаѣ надлежало бы отъ десятковъ числа 65 отдѣлить, или, какъ говорится, *занять одинъ десятокъ*, и присовокупить его къ простымъ единицамъ того же числа, т. е. къ 5; такимъ образомъ уменьшаемое число 65 изобразится въ видѣ:

5 *десятковъ* и 15 *простыхъ единицъ*,

а вычитаемое будетъ

4 *десятка* и 8 *простыхъ единицъ*.

Вычтя 8 простыхъ единицъ изъ 15, получимъ 7 простыхъ единицъ; далѣе, вычитаемъ 4 десятка изъ 5, и получаемъ 1

десятокъ. И такъ, разность двухъ чиселъ 65 и 48 будетъ 17. Это дѣйствіе изображается слѣдующимъ образомъ:

$$
\begin{array}{rr}
\text{Уменьшаемое:} & \dot{6}\,5 \\
\text{Вычитаемое:} & \underline{4\,8} \\
\text{Разность:} & 1\,7.
\end{array}
$$

Точка, поставленная надъ цифрою 6 показываетъ, что отъ этой цифры занятъ одинъ десятокъ, почему новое ея значеніе будетъ не 6, а только 5. И вообще, къ какому бы разряду не принадлежала та цифра, отъ которой заняли, значеніе ея всегда уменьшится одною единицею. Вотъ примѣръ посложнѣе:

$$
\begin{array}{rr}
\text{Уменьшаемое:} & \dot{3}\,\dot{6}\,\dot{1}\,3\,\dot{2}\,\dot{5} \\
\text{Вычитаемое:} & \underline{2\,9\,4\,1\,3\,7} \\
\text{Разность:} & 6\,7\,1\,8\,8
\end{array}
$$

Это вычитаніе читается такъ: 7 изъ 5 вычесть нельзя, занимаемъ единицу; 7 изъ 15, 8, пишемъ 8; 3 изъ 1 нельзя, занимаемъ 1; 3 изъ 11, 8, пишемъ 8; 1 изъ 2, 1; 4 изъ 11, 7; 9 изъ 15, 6; наконецъ, 2 изъ 2, ничего.

Если бы въ уменьшаемомъ числѣ было нѣсколько нулей сряду, то приступая къ вычитанію, надлежало бы вмѣсто перваго нуля, подъ которымъ стоитъ не нуль въ вычитаемомъ числѣ, и считая отъ правой руки къ лѣвой, поставить число 10; остальные же нули замѣнить цифрою 9, а цифру, стоящую за послѣднимъ нулемъ, уменьшить единицею; потомъ уже вычитать по прежнему правилу. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ число 2300056, которое, въ слѣдствіе сказаннаго сей-часъ, должно написать въ видѣ:

2299(10)56.

Ясно, что 299(10) всё равно что̀ 2990, сложенное съ 9 и 1; сложивъ эти три числа, получимъ 3000, какъ и должно быть. Мы написали число 10 въ скобкахъ; но обыкновенно для краткости его не пишутъ, а ставятъ точки надъ всѣми послѣдующими нулями и надъ цифрою, стоящею за послѣднимъ нулемъ.

Примѣръ.

Изъ	2˙3˙0˙0˙0 0 9
вычесть:	1 9 3 6 9 0 8
Разность:	3 6 3 1 0 1.

Вотъ какъ сдѣлано это вычитаніе: 8 изъ 9, 1; 0 изъ 0, 0; 9 изъ 10, 1; 6 изъ 9, 3; 3 изъ 9, 6; 9 изъ 12, 3.

Если бы цифра, предшествующая нулю (считая какъ и прежде отъ правой руки къ лѣвой), была менѣе соотвѣтствующей ей цифры въ вычитаемомъ, то и этотъ нуль обратился бы въ 9. И въ самомъ дѣлѣ, приведя его сперва къ 10, надлежало бы отъ этихъ 10 занять 1. Например̌ъ

	3 6˙0˙0˙1
	2 5 3 6 7
Разность:	1 0 6 3 4

то есть: 7 изъ 1 вычесть нельзя; обращаемъ ближайшій нуль въ 10, а второй въ 9 занимая отъ 6 единицу; занимаемъ единицу отъ 10, поставленныхъ на мѣсто перваго нуля, считая отъ правой руки къ лѣвой, и получаемъ 11; 7 изъ 11, 4; далѣе, такъ какъ отъ 10 заняли единицу, то и говоримъ: 6 изъ 9, 3; 3 изъ 9, 6; 5 изъ 5, 0; 2 изъ 3, 1, и находимъ разность 10634.

§ 29. Для повѣрки вычитанія стоитъ только сложить вычитаемое число съ полученною разностію. Если сумма найдена безошибочно, и равна уменьшаемому числу, то заключаемъ, что вычитаніе вѣрно.

Можно также употреблять вычитаніе для повѣрки сложенія. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ что изъ повѣряемой суммы вычли послѣдовательно всѣ слагаемыя, и получили въ разности нуль. Если всѣ вычитанія были произведены безошибочно, то и найденная сумма вѣрна.

§ 30. Задача. *Нѣкто долженъ былъ* 100250 *рублей. Въ первый разъ онъ уплатилъ въ счётъ этого долга* 36852 *рубля*,

а въ другой разъ 58364 *рубля. Спрашивается*, *сколько онъ еще долженъ?*

Чтобы найти уплаченную сумму, складываемъ числа 36852 и 58364, и получаемъ 95216 рублей. Вычтя это число изъ 100250, найдемъ должную сумму, которая будетъ 5034 рубля.

Объ умноженіи цѣлыхъ чиселъ.

§ 31. *Умноженіе есть дѣйствіе*, *посредствомъ котораго находимъ сумму нѣсколькихъ чиселъ*, *равныхъ между собою.* Напримѣръ, если бы желали знать, сколько придется выдать денегъ 37 работникамъ, полагая на человѣка по 7-ми рублей, то для этого надлежало бы написать число 7 тридцать семь разъ сряду, и потомъ сложить эти 37 чиселъ; такимъ образомъ нашли бы сумму 259; слѣдовательно, на всѣхъ работниковъ должно выдать 259 рублей.

Но замѣтимъ, что когда равныхъ слагаемыхъ чиселъ будетъ очень много, то сложеніе ихъ сдѣлается чрезвычайно затруднительнымъ по своей продолжительности; напримѣръ, еслибъ требовалось узнать, какую сумму составитъ число 386, повторенное 1000 разъ, то для этого надлежало бы написать 386 тысячу разъ сряду, и потомъ сложить тысячу чиселъ, что̀ конечно было бы весьма утомительно. Для избѣжанія этого неудобства, вмѣсто сложенія равныхъ чиселъ, употребляютъ другое, гораздо простѣйшее правило, которое, какъ уже сказано выше, называется *умноженіемъ.*

Число, которое дано для повторенія, называется *множимымъ*; другое число, означающее сколько разъ множимое должно быть повторено, *множителемъ*; число же, происшедшее отъ повторенія множимаго, называется *произведеніемъ.* Часто множимому и множителю даютъ общее названіе *множителей произведенія.* Въ первомъ примѣрѣ 7 было *множимое*, 37 *множитель*, а 259 *произведеніе.*

§ 32. Когда оба числа, множимое и множитель, состоятъ изъ одной цифры, то есть, когда ни тò ни другое не больше 9, то произведеніе ихъ легко найти посредствомъ обыкновеннаго сложенія. Напримѣръ, если бы нужно было знать, сколько составитъ число 7, повторенное 4 раза, то написали бы

7
7
7
7

Сумма: 28,

и найденная сумма 28 изобразила бы искомое произведеніе. Но вмѣсто того, чтобы, по мѣрѣ надобности искать такимъ образомъ произведенія цифръ между собою, несравненно выгоднѣе, и даже необходимо, выучить наизустъ всѣ эти произведенія. Они заключаются въ слѣдующей таблицѣ, называемой *Пиѳагоровой*:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Употребленіе этой таблицы очень просто: положимъ, что требуется найти произведеніе 7 на 8; ищемъ множимое 7 въ первомъ столбцѣ съ лѣвой стороны, а множитель 8 въ первомъ верхнемъ ряду. Произведеніе 56 этихъ двухъ чиселъ найдется на встрѣчѣ осьмаго столбца, то есть того, который начинается съ множителя 8, съ седьмымъ рядомъ, начинающимся съ множимаго 7.

§ 33. Изъ этой таблицы усматриваемъ, что произведеніе цифръ, взятыхъ въ обратномъ порядкѣ, не перемѣняется; такъ напримѣръ 5 помноженное на 6, или 6 помноженное на 5, составляетъ одно и тò же произведеніе 30. Это легко видѣть написавъ вмѣсто числа 5, повтореннаго 6 разъ, *шесть* рядовъ по *пяти* единицъ въ каждомъ, какъ слѣдуетъ ниже:

1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1

дѣйствительно, будемъ сперва считать эти единицы по рядамъ; такъ какъ въ каждомъ ряду находится по 5 единицъ, а всѣхъ рядовъ 6, то и заключаемъ, что число всѣхъ написанныхъ единицъ равно 5, умноженному на 6, то есть 30. Станемъ теперь считать единицы столбцами, то есть сверху внизъ; такъ какъ въ каждомъ изъ этихъ столбцовъ находится по 6 единицъ, а самыхъ столбцовъ счётомъ 5, то число всѣхъ единицъ будетъ равняться 6-ти, повторенному 5 разъ, или, что всё равно, произведенію 6 на 5. Но ясно, что при второмъ счётѣ, число написанныхъ единицъ не перемѣнилось; слѣдовательно, 6 умноженное на 5 равно также 30, какъ и произведеніе 5-ти на 6. Если бы вмѣсто множителей 5 и 6 взяли какіе ни есть другіе, то подобнымъ образомъ увидѣли бы, что

произведенія ихъ одинаковы, въ какомъ бы порядкѣ не производилось умноженіе. Отсюда заключаемъ, что при всякомъ умноженіи можемъ, по произволенію, принимать множимое за множитель, и на-оборотъ.

Иногда случается, что множимое требуютъ умножить на нѣсколько другихъ чиселъ. И въ этомъ случаѣ произведеніе не перемѣнится, въ какомъ бы порядкѣ не перемножались данныя числа. Напримѣръ, если бы желали помножить произведеніе 6 на 7, то есть 42, на 8, или найти произведеніе трехъ чиселъ 6, 7 и 8, то отъ насъ зависѣло бы перемножать эти числа въ какомъ угодно порядкѣ, какъ напримѣръ: 6 на 7 и потомъ на 8, или сперва 6 на 8, а потомъ на 7, или прежде 8 на 7, а потомъ на 6, и такъ далѣе. Во всякомъ случаѣ нашлось бы одно и то̀ же произведеніе, именно 336.

§ 34. Когда множимое состоитъ изъ нѣсколькихъ цифръ, а множитель только изъ одной, то произведеніе получится слѣдующимъ образомъ: *пишутъ множимое, а подъ его простыми единицами множитель, и проводятъ черту; потомъ помножаютъ каждую цифру множимаго на множитель, начиная съ простыхъ единицъ; каждое частное произведеніе, состоящее изъ одной цифры, пишется подъ чертою, и именно подъ тою цифрою множимаго, отъ которой оно произошло; если же частное произведеніе будетъ заключать простыя единицы и десятки, то простыя единицы пишутся на показанномъ сей-часъ мѣстѣ, а десятки на непосредственно слѣдующемъ, считая отъ правой руки къ лѣвой; или, проще, эти десятки придаются къ единицамъ частнаго произведенія, получаемаго отъ умноженія слѣдующей цифры множимаго. Полученное число подъ чертою будетъ искомое произведеніе.* Примѣръ:

Множимое:	587312
Множитель:	3
Произведеніе:	1761936

Вотъ какимъ образомъ произведено это умноженіе: 3-жды 2, 6; пишемъ 6 подъ чертой на мѣстѣ простыхъ единицъ; 3-жды 1, 3, пишемъ 3; 3-жды 3, 9, пишемъ 9; 3-жды 7, 21; 1 пишемъ подъ цифрою 7, то есть на мѣстѣ простыхъ тысячь, а 2 десятка удерживаемъ въ памяти для присовокупленія къ слѣдующему произведенію. Продолжаемъ: 3-жды 8, 24, да 2 въ умѣ, 26; пишемъ 6, а 2 въ умѣ; наконецъ, 3-жды 5, 15, да 2, 17; пишемъ 17, и получаемъ искомое произведеніе 1761936.

Изъ этого правила видимъ, что для умноженія числа, состоящаго изъ нѣсколькихъ цифръ, или, что̀ всё равно, изъ нѣсколькихъ разрядовъ, надлежитъ каждый разрядъ умножить отдѣльно, и потомъ сложить всѣ частныя произведенія. Найденная такимъ образомъ сумма будетъ равна искомому произведенію. Весьма легко убѣдиться въ справедливости этого правила: положимъ напримѣръ, что помножаемъ 14 на 3. Для этого повторяемъ *три* раза рядъ, составленный изъ ***четырнадцати*** единицъ, и отдѣляемъ чертою, съ правой стороны, по четыре единицы отъ каждаго ряда:

десять	четыре
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 .

ясно, что произведеніе 14 на 3 будетъ состоять изъ двухъ частныхъ произведеній 3 на 4 и 3 на 10. Для всякаго другаго множимаго и множителя, сколько бы они разрядовъ не заключали, это самое свойство докажется точно такимъ образомъ. Вообще, можно множимое разложить на произвольное число частей; помноживъ каждую на данный множитель, и взявъ сумму частныхъ произведеній, получится полное произведеніе. Такъ разсматривая произведеніе 17 на 4, или 68, можемъ разложить 17, напримѣръ, на части 3, 5 и 9; въ этомъ случаѣ найдемъ

три			пять					девять								
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

то есть произведеніе 17 на 4 равно суммѣ частныхъ произведеній: 3 на 4, 5 на 4 и 9 на 4.

Когда множимое или множитель оканчивается однимъ или нѣсколькими нулями, то умноженіе упрощается слѣдующимъ образомъ: производимъ дѣйствіе какъ будто бы этихъ нулей вовсе не было, и потомъ уже къ найденному произведенію приписываемъ съ правой стороны столько нулей, сколько ихъ было въ множимомъ или множителѣ. Напримѣръ:

Множимое.	36800	368
Множитель:	7	700
Произведеніе:	257600	257600.

Дѣйствительно, произведеніе 368 на 7, то есть 2576, во *сто* разъ меньше искомаго, потому что множимое 36800 (въ первомъ примѣрѣ), или множитель 700 (во второмъ примѣрѣ) во *сто* разъ больше числа, которое мы употребили при умноженіи. Приписавъ же два нуля къ числу 2576, оно становится во сто разъ больше, и такимъ образомъ получается настоящее произведеніе.

Если между цифрами множимаго находятся нули, то на соотвѣтствующихъ имъ мѣстахъ, въ произведеніи, слѣдуетъ ставить также нули. Но когда отъ предшествующаго частнаго произведенія удержано какое нибудь число, то оно должно быть написано на томъ мѣстѣ. Примѣръ

$$\begin{array}{r} 10702 \\ 4 \\ \hline 42808. \end{array}$$

Читаемъ 4-жды 2, 8, пишемъ 8; 4-жды 0, 0; пишемъ нуль, потому что не удержано никакого числа отъ предъидущаго произведенія 4 на 2; далѣе: 4-жды 7, 28, пишемъ 8, 2 въ умѣ; 4-жды 0, 0, и 2 въ умѣ, 2, пишемъ 2; наконецъ 4-жды 1, 4, пишемъ 4, и получаемъ искомое произведеніе 42808.

§ 35. Пріобрѣтя навыкъ въ умноженіи на одну цифру, очень легко помножать и на всякое число, сколько бы въ немъ не заключалось цифръ. Положимъ, напримѣръ, что требуется умножить 1384 на 263; поступаемъ слѣдующимъ образомъ: разлагаемъ одно изъ двухъ данныхъ чиселъ, а выгоднѣе для вычисленія мѐньшее изъ нихъ, именно 263, на 3 простыя единицы, 6 десятковъ или 60 и 2 сотни или 200. Множимое 1384 помножаемъ по порядку на цифры 3, 6 и 2, и получаемъ

1384	1384	1384
3	6	2
4152	8304	2768

Такъ какъ число 1384 слѣдовало помножить не просто на 6, но на 6 десятковъ, то самое произведеніе 8304 должно изображать *десятки*; обращая его въ простыя единицы, то есть увеличивая въ десять разъ, получимъ 83040. Подобнымъ образомъ, умножая 1384 на 2, мы получили 2768; но этотъ множитель 2 не равняется двумъ простымъ единицамъ, а двумъ *сотнямъ*; и такъ, произведеніе 1384 на 2 сотни будетъ 2768 сотенъ или 276800. Сумма трехъ частныхъ произведеній, въ слѣдствіе сказаннаго въ предъидущемъ § 34, будетъ равна искомому произведенію числа 1384 на 263; поэтому получимъ

4152
83040
276800

Искомое произведеніе: 363992

Чтобы по возможности сократить умноженіе на самомъ письмѣ, его располагаютъ обыкновенно слѣдующимъ образомъ: *изъ двухъ данныхъ чиселъ для умноженія пишутъ сперва бо́льшее, а подъ нимъ мѐньшее, съ правой стороны; потомъ проводятъ подъ вторымъ числомъ черту, и помножаютъ множимое по порядку на каждую цифру множителя, отъ правой руки къ лѣвой; пишутъ частныя произведенія одни подъ другими, отступая каждый разъ на одну цифру въ лѣвую сторону. Сумма всѣхъ частныхъ произведеній, написанныхъ въ показанномъ порядкѣ, изобразитъ искомое произведеніе.*

Въ слѣдствіе этого, умноженіе двухъ чиселъ предъидущаго примѣра должно быть расположено такъ:

Множители:	1384
	263
Частныя произведенія:	4152
	8304
	2768
Искомое произведеніе:	363992.

Когда пишемъ второе частное произведеніе 8304, то отступаемъ на одну цифру влѣво, потому что это число изображаетъ десятки, какъ уже показано выше; по настоящему, подъ первою цифрою 2 перваго частнаго произведенія, слѣдовало бы поставить 0, т. е. вмѣсто 8304 надлежало бы написать 83040; точно также, вмѣсто 2768, число 276800, при чемъ всѣ пустыя мѣста съ правой стороны въ частныхъ произведеніяхъ замѣстились бы нулями. Но этихъ нулей для сокращенія не пишутъ, а отступаютъ, какъ уже сказано, на одну цифру влѣво при записываніи каждаго частнаго произведенія. Вотъ примѣръ для упражненія:

```
     384275
       6143
    -------
    1152825
   1537100
   384275
  2305650
  ---------
  2360601325.
```

Если бы между цифрами множителя находился одинъ или нѣсколько нулей, напримѣръ, еслибъ требовалось умножить 1723 на 506, то поступая по объясненному сей-часъ правилу, нашли бы

```
   1723
    506
   ----
  10338
  0000
 8615
 ------
 871838.
```

Рядъ нулей, для сокращенія, не пишется; выпустивъ его получимъ

```
   1723
    506
   -----
  10338
 8615
 ------
 871838.
```

Здѣсь замѣчаемъ, что при записываніи втораго частнаго произведенія, надобно было отступить на *двѣ* цифры, и это потому, что одно промежуточное частное произведеніе, равное нулю, мы не писали. Если бы въ множителѣ находилось два нуля сряду, то пришлось бы отступить въ частномъ произве-

деніи на *три* цифры, и такъ далѣе. Вотъ еще нѣсколько примѣровъ:

```
     3721       15281     234000
     5002         3010      2600
    -----      -------    ------
     7442        15281    1404
  18605        45843      468
 --------     --------   ---------
 18612442     45995810   608400000.
```

Въ 1-мъ примѣрѣ отступили на три цифры, а во 2-мъ, къ произведенію приписанъ 0 съ правой стороны, потому что помноживъ данное число на 301, получимъ десятки искомаго произведенія, а не простыя единицы, какъ должно быть. Въ 3-мъ примѣрѣ, къ произведенію 6084 двухъ чиселъ 234 и 26, приписано *пять* нулей, то есть столько, сколько ихъ находится вмѣстѣ во множимомъ и во множителѣ; причина этого очевидна; и дѣйствительно, такъ какъ 234000 въ *тысячу* разъ болѣе 234, а 2600 во *сто* разъ болѣе 26, то настоящее произведеніе болѣе найденнаго въ *тысячу разъ сто*, то есть во *сто тысячъ*; слѣдовательно произведеніе 6084 должно умножить на 100000, или, что̀ всё равно, приписать съ правой стороны *пять* нулей къ этому числу.

§ 36. Легко удостовѣриться, что произведеніе двухъ какихъ ни есть чиселъ заключаетъ въ себѣ столько цифръ, сколько ихъ находится въ обоихъ множителяхъ, или одною менѣе. Для этого стоитъ только замѣнить сперва оба множителя единицами однихъ съ ними разрядовъ, а потомъ, единицами непосредственно высшихъ; очевидно, что первое изъ этихъ произведеній будетъ *менѣе*, а второе болѣе настоящаго. Съ другой же стороны, такъ какъ въ первое произведеніе войдетъ однимъ знакомъ менѣе противъ числа цифръ обоихъ множителей, а во второе однимъ болѣе, то отсюда и слѣдуетъ справедливость предложеннаго сей-часъ правила. Напримѣръ, про-

изведеніе чиселъ 256 на 23, имѣющихъ вмѣстѣ *пять* цифръ, болѣе произведенія 100 на 10, то есть болѣе 1000, но менѣе произведенія 1000 на 100, или 100000. Такъ какъ 1000 содержитъ въ себѣ *четыре*, а 100000 *шесть* знаковъ, то и заключаемъ, что въ произведеніе 256 на 23 войдетъ не менѣе *четырехъ*, и не болѣе *пяти* цифръ. Дѣйствительно, найдется, что 256 умноженное на 23, равно 5888, а въ этомъ числѣ *четыре* цифры.

§ 37. Когда множитель равенъ множимому, то произведеніе называется *квадратомъ*. Поэтому квадратъ единицы, или 1 умноженная на 1, будетъ 1; квадратъ 2-хъ, или 2 на 2, 4; квадратъ 3-хъ, 9; 4-хъ, 16; 5-ти, 25; 6-ти, 36; 7-ми, 49; 8-ми, 64; 9-ти, 81.

Подобнымъ образомъ получатся и квадраты чиселъ о нѣсколькихъ цифрахъ. Такъ квадратъ 11-ти будетъ 121, потому что произведеніе 11-ти на 11 равно 121. Квадратъ 12-ти равенъ 144, и такъ далѣе. Вотъ еще нѣсколько примѣровъ:

Квадр. 10-ти равенъ 100; квадр. 100 равенъ 10000; квадр. 23-хъ, 529; квадр. 635-ти, 403225.

Когда произведеніе получилось отъ перемноженія трехъ равныхъ между собою множителей, то оно называется *кубомъ*. Такъ кубъ единицы равенъ 1; кубъ 2-хъ равенъ произведенію трехъ множителей 2 на 2 и еще на 2, или 8; кубъ 3-хъ, 27; 4-хъ, 64; 5-ти, 125; 6-ти, 216; 7-ми, 343; 8-ми, 512; 9-ти, 729. Вотъ примѣры кубовъ для чиселъ, состоящихъ изъ нѣсколькихъ цифръ:

Кубъ 10-ти равенъ 1000; кубъ 100, 1000000; кубъ 23-хъ, 12167; кубъ 635-ти, 256047875.

Квадратъ числа называется также *второю его степенью*, а кубъ, *третею степенью*. При четырехъ равныхъ множителяхъ произведеніе принимаетъ названіе *четвертой степени*, при пяти, *пятой степени* и такъ далѣе.

§ 38. Для повѣрки умноженія можно, на основаніи сказаннаго въ § 34, перемножить данныя числа въ обратномъ порядкѣ. Если новое дѣйствіе произведено безошибочно, и получено прежденайденное произведеніе, то и первое умноженіе вѣрно.

§ 39. Задача. *Сколько содержится золотниковъ въ 36 пудахъ?*

Такъ какъ пудъ состоитъ изъ 40 фунтовъ, а фунтъ изъ 96 золотниковъ, то искомое число золотниковъ будетъ равняться произведенію трехъ чиселъ: 96 на 40 и на 36. Перемноживъ эти числа, найдется 138240.

О дѣленіи цѣлыхъ чиселъ.

§ 40. *Дѣленіе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго находимъ, сколько разъ извѣстное число повторяется въ другомъ, данномъ же числѣ.* Если бы, напримѣръ, требовалось узнать, сколько разъ 6 повторяется въ 24, то для этого стоило бы только написать 24 единицы рядами, по 6 единицъ въ каждомъ, какъ показано ниже

1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1

и потомъ сосчитать число рядовъ. Такъ какъ здѣсь имѣемъ 4 ряда, то и заключаемъ, что 6 входитъ 4 раза въ 24. Ясно, что чрезъ послѣдовательныя вычитанія числа 6 изъ 24, можно также опредѣлить число повтореній. Вычитая 6 изъ 24, или зачеркивая первый рядъ изъ 6 единицъ, получимъ 18; вычитая въ другой разъ 6 изъ 18, или вычеркивая второй рядъ получимъ 12; вычитая въ третій разъ 6 изъ 12, или зачеркивая третій рядъ, получимъ 6; наконецъ, вычитая въ четвертый разъ 6 изъ остающихся 6 единицъ, или вычеркивая

послѣдній рядъ, не останется ничего отъ прежняго числа 24. Изъ этого видно, что дѣйствіе дѣленія приводится къ повторенному вычитанію, при чёмъ вычитаемое число не перемѣняется. Но замѣтимъ, что если бы данное число заключалось очень много разъ въ другомъ данномъ числѣ, то вычисленіе, по причинѣ многочисленности вычитаній, сдѣлалось бы чрезвычайно утомительнымъ. Для возможнаго сокращенія этого дѣйствія (подобно тому какъ для сложенія равныхъ слагаемыхъ § 31), придумано особое правило, которое и названо *дѣленіемъ.*

Часто случается, что данное мѐньшее число не заключается ровное число разъ въ бо̀льшемъ. Такъ еслибъ въ прежнемъ примѣрѣ вмѣсто 24, дано было 29, при томъ же мѐньшемъ числѣ 6, то разложивъ это новое число 29 на единицы, и расположивъ ихъ въ видѣ

1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1

увидѣли бы, что отнявъ отъ 29 четыре раза по шести единицъ, останется еще 5 единицъ. Изъ этого заключаемъ, что 6 въ 29 содержится 4 раза съ *остаткомъ*, равнымъ 5 единицамъ.

Бо̀льшее число, данное для дѣленія, называется *дѣлимымъ*, мѐньшее, данное же число — *дѣлителемъ*; искомое число, означающее сколько разъ дѣлитель повторяется или заключается въ дѣлимомъ — *частнымъ числомъ.* Наконецъ, когда дѣлитель не содержится ровное число разъ въ дѣлимомъ, то остающееся число, которое во всякомъ случаѣ будетъ менѣе дѣлителя, принимаетъ названіе *остатка дѣленія*, или просто *остатка.* Въ послѣднемъ примѣрѣ было: 29, *дѣлимое*; 6, *дѣлитель*; 4, *частное число*; 5, *остатокъ.*

Когда дѣлитель заключается ровное число разъ въ дѣлимомъ, то ясно что произведеніе дѣлителя на частное число будетъ равняться дѣлимому, и это потому что дѣлимое, какъ сей-часъ было сказано, изображается совокупностію столькихъ рядовъ, сколько находится единицъ въ частномъ, при чёмъ каждый рядъ заключаетъ въ себѣ число единицъ, равное дѣлителю. И такъ, въ этомъ случаѣ, *дѣлимое* можно принимать за *произведеніе*, *дѣлитель*, за одинъ изъ *множителей*, а *частное*, за *другой множитель*. Но какъ при дѣленіи искомое число есть *частное*, то можемъ сказать также, что *дѣленіе есть дѣйствіе посредствомъ котораго по данному произведенію двухъ множителей, одного извѣстнаго, а другаго неизвѣстнаго, опредѣляемъ неизвѣстный множитель*. Изъ этого усматриваемъ, что дѣленіе есть дѣйствіе противоположное умноженію.

На основаніи такого понятія о дѣленіи, легко видѣть, что посредствомъ этого дѣйствія прямо рѣшается также и слѣдующій вопросъ: *найти величину части, когда знаемъ, что она повторяется извѣстное число разъ въ данномъ числѣ*. Напримѣръ, желая узнать, какъ велика часть, заключающаяся 6 разъ въ 24, находимъ, что она равна 4.

Если при дѣленіи одного числа на другое произойдетъ остатокъ, то дѣлимое будетъ равняться произведенію дѣлителя на частное число, сложенному съ остаткомъ. Это свойство становится очевиднымъ, когда изобразимъ дѣлимое рядами единицъ, какъ было показано выше. Такъ число 29, принимаемое за дѣлимое, равно произведенію дѣлителя 6 на частное 4, то есть числу 24, сложенному съ остаткомъ 5.

§ 41. Положимъ сперва, что дѣлимое и дѣлитель состоятъ изъ одной цифры. Въ такомъ случаѣ дѣленіе производится какъ нельзя проще. Пусть требуется, напримѣръ, раздѣлить 7 на 3; сообразивъ что 2-жды 3, 6, а 3-жды 3, 9, тотчасъ видимъ, что за частное число должно принять мѐньшее изъ

двухъ, именно 2; и въ самомъ дѣлѣ, еслибъ приняли за частное 3, то получили бы произведенiе 9, которое слишкомъ велико. Вычтя изъ дѣлимаго 7 произведенiе 6 дѣлителя 3 на частное 2, найдется остатокъ 1.

Если бы дѣлитель состоялъ, какъ и прежде, изъ одной цифры, а дѣлимое изъ двухъ, именно изъ единицъ и десятковъ, при чемъ число этихъ десятковъ было бы менѣе дѣлителя, то при твердомъ знанiи таблицы умноженiя, дѣленiе не представило бы никакого затрудненiя. Напримѣръ, желаемъ раздѣлить 78 на 9. Вспомнивъ, что 8-ью 9, 72, а 9-ью 9, 81, тотчасъ видимъ что частное есть 8; вычтя 72 изъ 78, получаемъ и остатокъ дѣленiя, именно число 6. Мы предположили сей-часъ, что число десятковъ дѣлимаго менѣе дѣлителя; въ противномъ случаѣ, дѣлимое было бы по крайней мѣрѣ въ десять разъ больше дѣлителя, и слѣдовательно частное число заключало бы въ себѣ и десятки, которые не находятся въ таблицѣ умноженiя между множителями.

§ 42. Положимъ теперь, что дѣлимое состоитъ изъ сколькихъ угодно цифръ, а дѣлитель изъ одной. Напримѣръ, пусть требуется раздѣлить 827 на 5. Поступаемъ какъ показано ниже:

$$\begin{array}{r|l} \text{Дѣлимое: } 827 & 5 \text{ Дѣлитель.} \\ 500 & \overline{165} \text{ Частное.} \\ \hline 327 & \\ 300 & \\ \hline 27 & \\ 25 & \\ \hline \text{Остатокъ: } 2. & \end{array}$$

Пишемъ дѣлимое 827, и по правую его сторону дѣлитель 5, отдѣляя ихъ чертою; потомъ, проведя другую черту подъ дѣлителемъ, получаемъ мѣсто для искомаго частнаго числа, и

начинаемъ дѣйствіе слѣдующимъ образомъ: 5 простыхъ единицъ дѣлителя содержатся въ 8 сотняхъ дѣлимаго *одну* сотню разъ; пишемъ въ частномъ 1, означающую сотню; помножаемъ её на 5, произведеніе 500 пишемъ подъ дѣлимымъ, и вычтя, получаемъ первый остатокъ 327. Далѣе говоримъ: 5 въ 32 десяткахъ содержится 6 десятковъ разъ; въ частномъ пишемъ цифру 6, означающую десятки; помножаемъ эти 60 на 5, и вычтя произведеніе 300 изъ 327, находимъ въ остаткѣ 27. Наконецъ: 5 въ 27, 5 разъ; пишемъ 5 простыхъ единицъ въ частномъ, а произведеніе 5 единицъ на дѣлитель 5, именно 25, подписываемъ подъ 27; вычтя, находимъ въ окончательномъ остаткѣ 2. И такъ, раздѣливъ число 827 на 5, получимъ 165 въ частномъ и 2 въ остаткѣ.

Замѣтимъ, что въ этомъ примѣрѣ мы разложили дѣлимое 827, начиная съ высшаго его разряда, на три части 800, 20 и 7, которыя, по раздѣленіи на дѣлитель, доставили искомую цифру того же самаго разряда въ частномъ числѣ. Такъ раздѣляя 800 на 5, нашли частное 100 и остатокъ 300, который, по раздѣленіи на 5, не производитъ уже сотень, а только десятки. Придавъ этотъ первый остатокъ ко второй части дѣлимаго, то есть къ 20, получили 320, и раздѣливъ это число на 5, нашли вторую цифру частнаго, именно его десятки; эта вторая цифра будетъ 6 десятковъ, или 60. Вычтя произведеніе 5 на 60 или 300 изъ 320, получили 20, и придавъ это число къ третей части дѣлимаго, именно къ 7, нашли 27; по раздѣленіи 27 на 5, получились простыя единицы частнаго, и какъ 5 содержится 5 разъ въ 27, съ остаткомъ 2, то и нашлось полное частное, состоящее изъ частей 100, 60 и 5, то есть число 165 и остатокъ 2.

Чтобы сократить на письмѣ тотъ случай дѣленія, который мы сей-часъ объяснили, лишніе нули выпускаются совсѣмъ, а послѣдовательные остатки не пишутся вполнѣ. Такъ

вмѣсто:		пишутъ:	
827	5	827	5
500	165	5	165
327		32	
300		30	
27		27	
25		25	
2		2.	

Въ этомъ сокращенномъ видѣ дѣленіе производится и читается слѣдующимъ образомъ: 5 въ 8, 1 разъ; въ частномъ пишемъ 1, а 5 подъ 8, первою цифрою дѣлимаго; 5 изъ 8, 3; сносимъ вторую цифру дѣлимаго 2, и получаемъ 32. Далѣе: 5 въ 32, 6 разъ, пишемъ 6 въ частномъ, а произведеніе 6 на 5, или 30 подъ 32; 30 изъ 32, 2; сносимъ третью цифру дѣлимаго 7, и получаемъ 27. Наконецъ, 5 въ 27, 5 разъ, пишемъ 5 въ частномъ, а 25 подъ 27; 25 изъ 27, 2; находимъ частное 165 и остатокъ 2.

Теперь предложимъ примѣръ, въ которомъ не всѣ цифры частнаго будутъ одинаковаго разряда съ разсматриваемыми частями дѣлимаго:

```
Дѣлимое: 1 6 1.8.4.3.2 | 7 Дѣлитель.
         1 4           |--------------
         ---           | 231204 Частное.
           2 1
           2 1
           ---
             0 8
               7
             ---
               1 4
               1 4
               ---
                 0 3 2
                   2 8
                 -----
Остатокъ:            4.
```

Здѣсь дѣленіе произведено слѣдующимъ образомъ: такъ какъ 7 не содержится въ 1, первой цифрѣ дѣлимаго, или, иначе: такъ какъ 1 милліонъ, раздѣленный на 7, не составитъ милліоновъ, а непосредственно нисшій разрядъ единицъ, именно сотни тысячь, то къ одному милліону дѣлимаго присовокупляемъ и его сотни тысячь, и говоримъ: 7 въ 16, 2 раза; пишемъ 2 въ дѣлимомъ, и эти 2 изображаютъ, какъ сей-часъ замѣчено, двѣсти тысячь; изъ 16 вычитаемъ произведеніе 2 на 7, то есть 14, и къ остатку 2 сносимъ слѣдующую цифру дѣлимаго 1; чтобы помнить, что эта цифра уже снесена, можно въ дѣлимомъ поставить подъ нею точку, или зачеркнуть ту цифру. Далѣе: 7 въ 21, 3 раза; пишемъ 3 въ частномъ, а 21, произведеніе 3 на 7, подъ остаткомъ 21; 21 изъ 21, 0, къ которому сносимъ цифру 8, и отмѣчаемъ её точкою въ дѣлимомъ; 7 въ 8, 1 разъ; пишемъ въ частномъ 1, а 7 вычитаемъ изъ 8; къ разности 1 сносимъ цифру 4; 7 въ 14, 2 раза; пишемъ 2 въ частномъ, а произведеніе 2 на 7, или число 14, подъ остаткомъ 14; къ новому остатку 0 сносимъ цифру 3 дѣлимаго; 7 въ 3, 0 разъ; пишемъ въ частномъ 0; слѣдовательно, десятковъ въ частномъ числѣ не будетъ; къ 3 сносимъ послѣднюю цифру 2 дѣлимаго и получаемъ 32; 7 въ 32, 4 раза; въ частномъ пишемъ 4, а произведеніе 28 числа 4 на 7 вычитаемъ изъ 32, и находимъ окончательный остатокъ 4. И такъ, раздѣливъ число 1618432 на 7, получимъ частное 231204 и остатокъ 4.

§ 43. Когда дѣлимое и дѣлитель состоятъ оба изъ нѣсколькихъ цифръ, то дѣленіе производится подобно тому какъ и выше, но только требуетъ бо̀льшаго на̀выка для пріисканія последовательныхъ цифръ частнаго числа. Для примѣра пусть требуется раздѣлить число 18597 на 26. Располагаемъ дѣйствіе слѣдующимъ образомъ:

```
Дѣлимое: 1 8 5 9.7 | 26 Дѣлитель.
         1 8 2     |-----------
         -----     | 715 Частное.
           3 9
           2 6
           ----
           1 3 7
           1 3 0
           -----
Остатокъ:      7.
```

Ясно, что частное не можетъ заключать въ себѣ десятковъ тысячь какъ дѣлимое, потому что умноживъ 26 на 10 тысячь, получимъ 260000, а это число болѣе дѣлимаго; въ частномъ не можетъ быть даже и простыхъ тысячь, ибо, помноживъ 26 на одну тысячу, получимъ число 26000, которое болѣе дѣлимаго. И такъ, наивысшій разрядъ въ частномъ числѣ будетъ состоять изъ сотень. Поэтому ищемъ, сколько разъ 26 содержится въ 185 сотняхъ дѣлимаго, или, просто, 26 въ 185. Легко сообразить, что это число разъ будетъ 7, потому что принявъ мысленно вмѣсто 26 число 25, разнствующее только одною единицею отъ 26, и замѣтивъ что оно содержится 4 раза во 100 и 3 раза въ 75, а слѣдовательно 7 разъ въ 175, мы усматриваемъ, что и 26 заключается 7 разъ въ 186; дѣйствительно, избытокъ 26 предъ 25, то есть 1, повторенная 7 разъ и прибавленная къ 175, доставляетъ число 182, которое 3-мя единицами меньше дѣлимаго 185. И такъ, пишемъ 7 въ частномъ числѣ, а 182 подъ 185, и вычитаемъ; къ остатку 3 сносимъ слѣдующую цифру 9 дѣлимаго, и получаемъ 39 десятковъ. Далѣе говоримъ: 26 въ 39 десяткахъ содержится 10 разъ, или, проще: 26 въ 39, 1 разъ; пишемъ 1 въ частномъ на мѣстѣ десятковъ, а 26 подъ 39; вычтя 26 изъ 39, и снеся цифру 7 къ разности 13, получимъ остатокъ 137. Продолжаемъ: 26 въ 137, 5 разъ; пишемъ 5 въ частномъ, а произведеніе 130 дѣлителя 26 на 5, подъ 137; вычитаемъ, и

находимъ окончательный остатокъ 7. И такъ, по раздѣленіи 18597 на 26, получится частное 715 и остатокъ 7.

Когда по снесеніи цифры дѣлимаго къ одному изъ остатковъ получится число мѐньшее дѣлителя, то это значитъ, что въ частномъ нѣтъ того разряда единицъ, который изображенъ въ дѣлимомъ снесенною цифрою. Въ такомъ случаѣ надлежитъ поставить *нуль* въ частномъ на упомянутомъ мѣстѣ, и снести еще одну цифру дѣлимаго. Если и послѣ этого остатокъ будетъ меньше дѣлителя, то въ частномъ пишутъ второй нуль, а къ остатку сносятъ третью цифру, и такъ далѣе. Вотъ примѣръ, объясняющій этотъ случай:

```
1 1 8 7.9.4.0.5.8 | 39
1 1 7             |---------
-----             | 3046001
  1 7 9
  1 5 6
  -----
    2 3 4
    2 3 4
    ---------
        0 0 5 8
            3 9
            ---
            1 9.
```

Здѣсь имѣемъ: 39 въ первыхъ двухъ цифрахъ дѣлимаго, то есть въ 11, не содержится; беремъ три цифры, именно число 118, и говоримъ: 39 въ 118, 3 раза; пишемъ 3 въ частномъ, а 117, равное произведенію 3 на 39, подъ 118, и вычитаемъ; къ остатку 1 сносимъ цифру 7 дѣлимаго, и получаемъ 17. Такъ какъ 39 не содержится въ 17, то пишемъ 0 въ частномъ, и сносимъ къ остатку слѣдующую цифру 9 дѣлимаго; 39 въ 179, 4 раза; пишемъ 4 въ частномъ, а произведеніе 156 дѣлителя 39 на 4 подъ 179, и вычитаемъ; къ разности 23 сносимъ цифру 4, и говоримъ: 39 въ 234, 6 разъ; произведеніе 6 на 39, то есть число 234, вычитаемъ изъ 234, и получаемъ

въ остаткѣ 0. Сносимъ 0 дѣлимаго; 39 въ 0, 0 разъ; въ частномъ пишемъ 0, и сносимъ 5; 39 въ 5, 0 разъ; опять записываемъ 0 въ частномъ, и сносимъ къ 5 послѣднюю цифру 8 дѣлимаго; 39 въ 58, 1 разъ; пишемъ 1 въ частномъ, и вычтя 39 изъ 58, получаемъ остатокъ 19. И такъ, частное будетъ 3046001, а остатокъ 19.

§ 44. При сложномъ дѣлителѣ, и при значительномъ числѣ цифръ дѣлимаго, отъискиваніе послѣдовательныхъ цифръ частнаго могло бы иногда показаться затруднительнымъ. Напримѣръ, положимъ, что начинаемъ слѣдующее дѣленіе:

$$25786234805 \,|\, 3973$$

Для опредѣленія первой цифры частнаго надобно узнать, сколько разъ 3973 заключается въ 25786. Съ перваго взгляда мы этого не видимъ. Но ежели вмѣсто настоящаго дѣлителя возьмемъ числа 3000 и 4000, между которыми онъ заключается, то для этихъ чиселъ не трудно будетъ найти первую цифру частнаго. Для 3000 надобно узнать, сколько разъ 3 содержится въ 25, то есть въ двухъ первыхъ цифрахъ числа 25786, отдѣленнаго отъ дѣлимаго; эта цифра будетъ 8. Для 4000 ищемъ, сколько разъ 4 содержится въ 25, и находимъ 6. И такъ, для бо̀льшаго дѣлителя нашли цифру 6, а для мѐньшаго 8. Поэтому первая цифра частнаго, для настоящаго дѣлителя, будетъ не менѣе 6 и не болѣе 8, то есть одна изъ трехъ слѣдующихъ: 6 или 7 или 8. Помножая дѣлитель на 6, находимъ

$$\begin{array}{r} 3973 \\ 6 \\ \hline 23838, \end{array}$$

умножая на 7, получимъ

$$\begin{array}{r} 3973 \\ 7 \\ \hline 27811. \end{array}$$

Такъ какъ послѣднее произведеніе уже болѣе числа 25786, то помножать на 8 и не нужно, и мы прямо видимъ, что искомая первая цифра частнаго будетъ 6. Подобнымъ образомъ нашли бы и слѣдующія его цифры. Но при сложномъ дѣленіи, какъ напримѣръ для предложенныхъ сей-часъ чиселъ, выгоднѣе найти прежде произведенія даннаго дѣлителя на всѣ цифры, начиная съ 1 и до 9, и написать ихъ въ слѣдующемъ порядкѣ:

3973	1
7946	2
11919	3
15892	4
19865	5
23838	6
27811	7
31784	8
35757	9.

При такой табличкѣ, которую очень легко составить, даже посредствомъ сложенія, можно прямо писать послѣдовательныя цифры частнаго. Вотъ вычисленіе для предъидущаго примѣра:

```
2 5˙7 8˙6 2.3.4.8.0.5 | 3973
2 3 8 3 8             |---------
---------             | 6490368
  1 9˙4˙8 2
  1 5 8 9 2
  ---------
    3 5 9˙0˙3
    3 5 7 5 7
    ---------
      1 4˙6 4˙8
      1 1 9 1 9
      ---------
        2 7˙2 9˙0
        2 3 8 3 8
        ---------
          3 4˙5˙2 5
          3 1 7 8 4
          ---------
            2 7 4 1.
```

§ 45. Когда дѣлимое и дѣлитель оканчиваются нулями, то, приступая къ дѣленію, зачеркиваемъ напередъ всѣ нули въ томъ изъ этихъ двухъ чиселъ, въ которомъ ихъ меньше, и столько же въ другомъ числѣ. Потомъ производимъ дѣленіе надъ сокращенными числами, и къ найденному остатку приписываемъ съ правой стороны столько нулей, сколько зачеркнули ихъ въ дѣлителѣ. Напримѣръ, если бы требовалось раздѣлить 197000 на 3600, то въ дѣлителѣ 3600 уничтожили бы оба нуля, и столько же въ дѣлимомъ 197000; раздѣливъ 1970 на 36, нашли бы въ частномъ 54, а въ остаткѣ 26, къ которому приписываемъ *два* нуля, и получаемъ настоящій остатокъ 2600. Это правило объясняется самыми пріёмами дѣленія. Дѣйствительно, сравнимъ между собою слѣдующія три дѣйствія:

1970	36	19700	360	197000	3600
180	54	1800	54	18000	54
170		1700		17000	
144		1440		14400	
Остат: 26		Остат: 260		Остат: 2600.	

Въ первомъ дѣйствіи откинуто два нуля, какъ въ дѣлимомъ, такъ и въ дѣлителѣ. Во второмъ дѣйствіи удержано по одному нулю въ дѣлимомъ и въ дѣлителѣ, и получено то̀ же частное какъ и въ первомъ дѣйствіи, но остатокъ въ 10 разъ бо̀льшій противъ перваго. Въ третьемъ дѣйствіи удержаны оба нуля; частное не перемѣнилось, а остатокъ вышелъ во 100 разъ больше перваго. Ясно, что сколько новыхъ нулей не припишемъ къ дѣлимому и дѣлителю, по̀-ровну, частное не перемѣнится, а придется только къ каждому изъ чиселъ, написанныхъ подъ дѣлимымъ, а слѣдовательно и къ окончательному остатку, прибавить по такому же числу нулей. Впрочемъ, это правило обнаружится само собою, когда будемъ говорить о дробяхъ и объ общемъ наибо̀льшемъ дѣлителѣ.

§ 46. Должно замѣтить, что по данному дѣлимому и дѣлителю, можно очень легко узнать число цифръ частнаго. Дѣйствительно, если по отдѣленіи отъ дѣлимаго, съ лѣвой стороны, столькихъ цифръ сколько ихъ находится въ дѣлителѣ, получимъ число не мѐньшее дѣлителя, то частное будетъ состоять изъ одной цифры лишней противъ избытка цифръ дѣлимаго предъ дѣлителемъ. Если же первое отдѣленное число въ дѣлимомъ менѣе дѣлителя, то частное будетъ состоять ровно изъ этого избытка. Напримѣръ, частное двухъ чиселъ 36852 и 28 будетъ содержать *четыре* цифры потому что 36 больше 28, а частное для чиселъ 8563 и 98, только *двѣ* цифры, — потому что 85 меньше 98. Въ справедливости этихъ заключеній удостовѣряемся непосредственно замѣтя, что всякій разъ какъ сносимъ цифру дѣлимаго, получаемъ новую цифру въ частномъ числѣ.

§ 47. Такъ какъ произведеніе дѣлителя на частное, сложенное съ остаткомъ, равняется дѣлимому, то повѣрку дѣленія можно основывать на этомъ свойствѣ. Поэтому, для повѣрки перваго примѣра § 43, гдѣ было найдено, что частное для чиселъ 18597 и 26 равняется 715 съ остаткомъ 7, поступаемъ слѣдующимъ образомъ:

$$
\begin{array}{r}
715 \\
26 \\
\hline
4290 \\
1430 \\
\hline
18590 \\
7 \\
\hline
18597,
\end{array}
$$

и какъ найденное число равно дѣлимому, то заключаемъ, что дѣленіе вѣрно, предполагая однакожъ, что новое вычисленіе произведено безошибочно.

Для повѣрки умноженія, дѣлимъ произведеніе на одинъ изъ множителей. Если дѣленіе произведено безъ ошибки, и въ частномъ числѣ получили другой изъ двухъ данныхъ множителей, то умноженіе вѣрно.

§ 48. Задача. ***На 246 работниковъ выдано* 33948 *рублей. Сколько приходится на человѣка*?**

Для рѣшенія задачи слѣдуетъ раздѣлить 33948 на 246; частное будетъ 138 безъ остатка. И такъ, на каждаго работника придется по 138 рублей.

Примѣчаніе. Для упражненія учащихся, очень полезно предлагать имъ примѣры *послѣдовательнаго дѣленія*, а именно: дѣлимое раздѣлить на дѣлитель, отъ чего получится частное и вообще нѣкоторый остатокъ; потомъ дѣлитель раздѣлить на этотъ первый остатокъ; далѣе: первый остатокъ дѣлить на второй, второй на третій, и такъ далѣе до тѣхъ поръ, пока не дойдемъ до дѣленія безъ остатка. При такомъ дѣйствіи удобнѣе писать дѣлители по лѣвую сторону дѣлимыхъ, какъ видно изъ слѣдующаго, весьма простаго примѣра:

117	1157	9		
	1053			
1-й Ост: 104	117	1		
	104			
2-й Ост: 13	104	8		
	104			
3-й Ост: 0.				

Въ Отдѣлѣ IV будетъ показано, какимъ образомъ послѣдовательное дѣленіе служитъ для опредѣленія общаго наибóльшаго дѣлителя, а въ Отдѣлѣ VII, употребленіе этого дѣйствія для обращенія обыкновенной дроби въ непрерывную. И такъ, учащіеся, упражняясь заранѣе въ примѣрахъ послѣдовательна-

го дѣленія, пріобрѣтутъ нȧвыкъ не только въ обыкновенномъ дѣленіи, но вмѣстѣ съ тѣмъ и въ двухъ упомянутыхъ способахъ, необходимыхъ въ Ариѳметикѣ.

Обозрѣніе четырехъ главныхъ ариѳметическихъ дѣйствій. Данныя и искомыя числа; знаки, употребляемые для означенія основныхъ дѣйствій. Совокупленіе сихъ послѣднихъ между собою, или о смѣшанныхъ *дѣйствіяхъ.*

§ 49. Занимаясь четырьмя основными дѣйствіями, мы видѣли, что въ каждомъ изъ нихъ нѣкоторыя числа даны, а другія ищутся по извѣстнымъ правиламъ. Данныя числа, то есть тѣ, надъ которыми производимъ дѣйствія, называются ***данными*** или ***извѣстными***, а другія, которыя ищемъ, — ***искомыми*** или ***неизвѣстными***. Приступая ко всякой ариѳметической выкладкѣ, надобно непремѣнно имѣть въ виду, какія числа *даны*, и какія ***ищутся***. Для четырехъ основныхъ дѣйствій ***данныя*** и ***искомыя*** числа будутъ:

	Сложеніе:	*Вычитаніе:*	*Умноженіе:*	*Дѣленіе:*
Данныя:	Слагаемыя.	Уменьшаемое и Вычитаемое.	Множимое и Множитель.	Дѣлимое и Дѣлитель.
Искомыя:	Сумма.	Разность.	Произведеніе.	Частное и Остатокъ.

§ 50. Замѣтимъ, что въ сложеніи и умноженіи искомыя всегда бываютъ болѣе данныхъ; дѣйствительно, сумма болѣе каждаго изъ слагаемыхъ, а произведеніе болѣе каждаго изъ данныхъ двухъ множителей. Напротивъ того, въ вычитаніи и дѣленіи, искомыя всегда бываютъ менѣе бȯльшихъ изъ двухъ данныхъ чиселъ, то есть уменьшаемаго въ вычитаніи, и дѣлимаго въ дѣленіи; и въ самомъ дѣлѣ, разность менѣе уменьшаемаго, а частное и остатокъ менѣе дѣлимаго. Отсюда заключаемъ, что ***увеличеніе цѣлыхъ чиселъ*** производится посредствомъ ***сложенія*** и ***умноженія***, а ***уменьшеніе*** ихъ посредствомъ ***вычитанія*** и ***дѣленія***.

§ 51. Для означенія на письмѣ четырехъ дѣйствій, употребляютъ особые знаки. Для *сложенія* пишутъ знакъ + (*плюсъ*) между слагаемыми. Поэтому 123 + 36 + 78 значитъ, что требуется найти сумму трехъ чиселъ: 123, 36 и 78. Чтобы указать знакомъ, что эта сумма равна 237, пишутъ

$$123 + 36 + 78 = 237,$$

что̀ произносится такъ: 123 *плюсъ* 36 *плюсъ* 78 *равно* 237.

Знакъ равенства = употребляютъ при всѣхъ возможныхъ дѣйствіяхъ, и ставятъ между равными числами.

При *вычитаніи* одного числа изъ другаго, отдѣляютъ уменьшаемое отъ вычитаемаго знакомъ —, который произносится *минусъ* или *безъ*. Поэтому 363 — 294 значитъ, что изъ 363 надобно вычесть 294, и какъ эта разность есть 69, то и пишутъ

$$363 - 294 = 69,$$

что̀ произносится такъ: 363 *минусъ* 294 *равно* 69, или 363 *безъ* 294 *равно* 69.

Въ *умноженіи* одного числа на другое, употребляютъ или ×, или просто *точку* (.); тотъ и другой знакъ пишется между множителемъ и множимымъ. Такъ

$$23 \times 7 \quad \text{или} \quad 23 \, . \, 7$$

означаетъ, что число 23 должно быть умножено на 7, и какъ это произведеніе равно 161, то и пишутъ

$$23 \times 7 = 161 \quad \text{или} \quad 23 \, . \, 7 = 161,$$

то есть: 23 *умноженное на* 7, или проще, 23 *на* 7 *равно* 161.

Когда требуется означить произведеніе нѣсколькихъ чиселъ между собою, то всѣ они пишутся рядомъ, и отдѣляются знаками ×, или точками, какъ и въ случаѣ двухъ множителей. Поэтому, произведеніе четырехъ чиселъ 2, 4, 9 и 23 означается такъ:

$$2 \times 4 \times 9 \times 23 \quad \text{или} \quad 2 \, . \, 4 \, . \, 9 \, . \, 23;$$

перемноживъ настоящимъ образомъ, найдемъ произведеніе 1656, въ слѣдствіе чего получимъ

$$2 \times 4 \times 9 \times 23 = 1656 \text{ или } 2 . 4 . 9 . 23 = 1656.$$

Дѣленіе означаютъ или *двоеточіемъ* (:), или *чертою* ——. При употребленіи двоеточія, этотъ знакъ ставится между дѣлимымъ и дѣлителемъ, какъ въ примѣрѣ 56 : 7, гдѣ 57 есть дѣлимое, а 7 дѣлитель. Употребляя же черту, пишутъ дѣлитель подъ дѣлимымъ, и отдѣляютъ ихъ чертою въ видѣ $\frac{56}{7}$. Замѣтивъ, что частное есть 8, безъ остатка, получимъ

$$56 : 7 = 8 \text{ или } \frac{56}{7} = 8,$$

чтò выговаривается слѣдующимъ образомъ: 56 *дѣленное на* 7 *равно* 8; или: 56 *седьмыхъ равно* 8.

Когда, при дѣленіи одного числа на другое, произойдетъ остатокъ, то къ частному, находящемуся по правую сторону знака =, приписываютъ этотъ остатокъ раздѣленный на дѣлитель. Напримѣръ, раздѣливъ 138 на 7, получимъ частное 19 и остатокъ 5, почему и пишемъ

$$\frac{138}{7} = 19 + \frac{5}{7}, \text{ или проще: } \frac{138}{7} = 19\frac{5}{7}.$$

И въ самомъ дѣлѣ, въ настоящемъ случаѣ, одно частное не изобразитъ всего чтò получено при дѣленіи: кромѣ частнаго, есть еще остатокъ, который надобно также раздѣлить на дѣлитель. Но какъ остатокъ меньше дѣлителя, то отъ дѣленія произойдетъ дробь (§ 4). Покамѣстъ достаточно этого замѣчанія: въ слѣдующемъ Отдѣлѣ, въ которомъ говорится о дробяхъ, сказанное здѣсь вполнѣ объяснится.

Для изображенія неравенства двухъ чиселъ, употребляютъ знаки $>$ и $<$. Знакъ $>$ означаетъ что число, находящееся по лѣвую его сторону, *больше* числа, написаннаго съ правой его стороны; другой знакъ $<$ означаетъ, напротивъ того, что чи-

сло съ лѣвой стороны *меньше* числа съ правой. Читаются они *больше* и *меньше*; напримѣръ, $12 > 9$, $8 < 9$.

§ 52. Изображеніе знаками всякаго ариѳметическаго дѣйствія съ получаемымъ по совершеніи его слѣдствіемъ, называется *равенствомъ*. Такъ въ предъидущемъ § мы имѣли слѣдующія пять равенствъ:

$$123 + 36 + 78 = 237$$
$$363 - 294 = 69$$
$$23.7 = 161$$
$$\frac{56}{7} = 8$$
$$\frac{138}{7} = 19\frac{5}{7}.$$

Написанное по лѣвую сторону знака $=$, называется *первою частью* равенства, а по правую, *второю его частью*. Числа, отдѣленныя между собою знаками или $+$ или $-$, можно назвать *членами*; такъ въ равенствѣ

$$123 + 36 + 78 = 237,$$

числа 123, 36 и 78 суть *члены* первой части равенства, а 237 есть *членъ* второй его части. Второе изъ приведенныхъ пяти равенствъ имѣетъ три члена 363, 294 и 69. Третье, четвертое и пятое каждое по̀-два.

§ 53. Употребленіе показанныхъ знаковъ представляетъ весьма простой способъ для означенія не только одного *отдѣльнаго* изъ четырехъ основныхъ дѣйствій, но и всякаго ихъ совокупленія. Подобныя совокупленія можно назвать *смѣшанными дѣйствіями*. Положимъ, напримѣръ, желали бы означить знаками слѣдующую совокупность дѣйствій: *къ* 120 *придать произведеніе* 9 *на* 11, *изъ суммы вычесть* 37, *и разность раздѣлить на* 13. Пишемъ прямо

$$\frac{120 + 9 . 11 - 37}{13};$$

совершивъ означенныя дѣйствія, находимъ искомое число 14: и такъ

$$\frac{120+9.11-37}{13}=14.$$

Вотъ еще нѣсколько примѣровъ для упражненія:

$$\frac{80-27:9+8.9+16}{11}=15$$

$$\frac{18+91-31}{3}+4.6.7=194$$

$$\frac{210}{3.4+5.6}+7.16-17=100$$

$$(13.23-283)\times 11+357-\frac{99}{3}=500$$

$$\frac{(8.9+28):10+8.3-5}{7}=4\frac{1}{7}.$$

Въ предпослѣднемъ примѣрѣ разность $13.23-283=16$ заключена въ скобки для того, чтобы показать, что не членъ 283, а разность $13.23-283$, то есть 16, должно помножить на 11. Въ послѣднемъ примѣрѣ тò же самое сдѣлано съ суммою $8.9+28$; она написана въ скобкахъ, и это значитъ, что не членъ 28 дѣлится на 10, а сумма $8.9+28=100$.

Вторыя части этихъ равенствъ, и вообще числа, которыя получаются по совершеніи всѣхъ требуемыхъ дѣйствій надъ данными числами, можно назвать *результатами* или *выводами*. И такъ, результаты *сложенія, вычитанія, умноженія* и *дѣленія* будутъ: *сумма*, *разность*, *произведеніе* и *частное*, разсматриваемое вмѣстѣ съ *остаткомъ*.

ОТДѢЛЪ III.

Происхожденіе и основныя свойства дробей.

§ 54. Въ §§ 4, 5 и 8 показано было въ короткихъ словахъ происхожденіе дробей. Здѣсь займемся подробно этимъ предметомъ.

Мы уже видѣли, что производя дѣленіе одного числа на другое, получается частное, и сверхъ того, очень часто, *остатокъ*, который всегда бываетъ менѣе дѣлителя. Разсмотримъ внимательнѣе, что̀ означаетъ этотъ остатокъ. Положимъ, напримѣръ, требуется раздѣлить 21 рубль между 5-ю человѣками; производя дѣленіе 21 на 5, получаемъ въ частномъ 4, а въ остаткѣ 1; какъ частное, такъ и остатокъ, означаютъ здѣсь рубли. Слѣдовательно, на человѣка придется по 4 рубля, и, сверхъ того, останется еще *одинъ рубль* на *пятерыхъ*. Ясно, что для дѣйствительнаго раздѣла этого остатка, то есть одного рубля, между 5-ю человѣками, надобно замѣнить нашу именованную единицу *рубль*, пятью равными частями рубля, и потомъ, въ добавокъ къ 4 рублямъ, выдать на каждаго человѣка по одной такой части. Эта часть, то есть *пятая доля рубля*, очевидно равна 20 *копѣйкамъ*. Такимъ образомъ совершится ровный раздѣлъ, и слѣдствіемъ его будетъ 4 рубля 20 копѣекъ, или: *4 рубля съ присовокупленіемъ пятой части рубля*. Само присовокупленіе, которое произошло отъ остатка, есть результатъ дѣленія: дѣйствительно, еслибъ мы замѣнили *рубль* 100 *копѣйками*, то есть, приняли бы другую, мѐньшую именованную единицу, то пятая часть рубля изобразилась бы такъ: $\frac{100}{5} = 20$ копѣйкамъ. Но когда удержимъ прежнюю единицу, въ настоящемъ случаѣ *рубль*, то вмѣсто цѣлаго числа $\frac{100}{5}=20$, означающаго копѣйки, результатъ дѣленія остатка 1 на дѣлитель 5, представится въ видѣ $\frac{1}{5}$, и изобразитъ *одну пятую долю рубля*, то есть *одинъ рубль*, *раздѣленный на пять*. Ясно, что какого бы рода не были единицы дѣлимаго 21, численное слѣдствіе всегда будетъ одно и то̀ же, именно: 4 цѣлыя единицы разсматриваемаго рода съ присовокупленіемъ къ нимъ одной пятой части той же единицы, что̀ изображается такъ: $4+\frac{1}{5}$ или $4\frac{1}{5}$, а читается: *4 плюсъ одна пятая*, или *4 и одна пятая*. Этотъ численный результатъ, въ которомъ

родъ единицъ не называется, будетъ числомъ отвлеченнымъ (§§ 7 и 8).

Возьмемъ еще примѣръ: желаемъ раздѣлить 19 аршинъ на 8 частей; производя дѣленіе, находимъ частное 2 и остатокъ 3. Слѣдовательно, осьмая часть 19 аршинъ будетъ 2 аршина съ присовокупленіемъ *осьмой части трехъ аршинъ*. Положимъ, что линія



изображаетъ три аршина; надобно найти ея осьмую часть. Раздѣливъ всю эту линію на 8 частей, и взявъ одну такую часть, найдемъ ту долю аршина, которую слѣдуетъ прибавить къ 2 аршинамъ. Втѣсто того чтобы дѣлить линію въ 3 аршина на 8 частей, можно раздѣлить 1 аршинъ на тò же число 8, и потомъ взять 3 раза найденную часть. Но 8-ая часть аршина будетъ 2 вершка; слѣдовательно, помноживъ 2 на 3, получимъ 6 *вершковъ* для осьмой доли трехъ аршинъ. И такъ, результатъ дѣленія 19 аршинъ на 8, будетъ 2 *аршина* и 6 *вершковъ*. Вмѣсто 6 вершковъ можно написать $\frac{3}{8}$ аршина, чтò читается такъ: *три осьмыхъ аршина*.

§ 55. Въ двухъ приведенныхъ сей-часъ примѣрахъ, результатъ дѣленія остатка на дѣлитель равнялся цѣлому числу именованныхъ единицъ, мѐньшаго наименованія противъ тѣхъ, которыя изображало дѣлимое. Такъ въ первомъ примѣрѣ *одна пятая часть рубля* изобразилась ровно 20-ью копѣйками, а во второмъ, *осьмая часть трехъ аршинъ*, ровно 6-ю вершками. Но часто случается, что слѣдствіе дѣленія остатка на дѣлитель не можетъ быть изображено цѣлымъ числомъ единицъ опредѣленнаго наименованія; такъ если бы требовалось раздѣлить пò-ровну 25 рублей между 7-ю человѣками, то на долю каждаго пришлось бы три рубля съ присовокупленіемъ седьмой части 4 рублей, или седьмой части 400 копѣекъ, то есть 57 копѣекъ и еще седьмой доли одной копѣйки. Такъ какъ въ

монетахъ нѣтъ подраздѣленія, равнаго седьмой долѣ копѣйки, то и нельзя изобразить искомой части въ *цѣлыхъ* именованныхъ единицахъ. Изъ этого видимъ необходимость означенія и изслѣдованія подобныхъ долей или частей единицы, которыя и называются *дробями*.

§ 56. Когда дѣлимъ отвлеченное число на другое, и получаемъ остатокъ, то въ такомъ случаѣ можемъ только изобразить результатъ дѣленія этого остатка на дѣлитель, означивъ обыкновеннымъ образомъ дѣленіе, то есть, написавъ сперва остатокъ, а потомъ дѣлитель, и между ними двоеточіе; или еще: написавъ подъ остаткомъ дѣлитель, и отдѣливъ ихъ чертою. Напримѣръ, если бы остатокъ былъ 2, а дѣлитель 7, то слѣдовало бы написать

$$2:7 \text{ или } \frac{2}{7}$$

что̀ читается *двѣ седьмыхъ*.

Такое изображеніе результата дѣленія мѐньшаго числа на бо̀льшее, называется *правильною дробью* или просто *дробью*. Изъ двухъ видовъ $2:7$ и $\frac{2}{7}$, въ которыхъ дробь можетъ быть написана, выбрали второй, именно $\frac{2}{7}$, какъ болѣе удобный.

И такъ дробь $\frac{1}{7}$ означаетъ, что единица, какого бы она не была рода, раздѣлена на 7 равныхъ частей, изъ которыхъ разсматривается *одна*; дробь $\frac{2}{7}$ изображаетъ *двѣ* такія части; $\frac{3}{7}$ *три* такія же части, и такъ далѣе. Наконецъ дробь $\frac{7}{7}$, показывающая, что взяты всѣ эти *семь* частей, изображаетъ очевидно *цѣлую единицу*. По той же причинѣ каждая изъ дробей $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{100}{100}$ и проч., въ которыхъ дѣлимое равно дѣлителю, означаетъ единицу.

Изъ сказаннаго здѣсь о происхожденіи дробей, мы ясно видимъ, что во всякой дроби должно принимать въ расчётъ два обстоятельства: 1-е на сколько равныхъ частей раздѣлена единица и 2-е сколько взято такихъ частей. Такъ дробь $\frac{2}{7}$ по-

казываетъ, что единица раздѣлена на 7 равныхъ частей, изъ которыхъ взято 2 части. Число, означающее на сколько частей раздѣлена единица, называется *знаменателемъ* дроби, а число, изображающее сколько взято этихъ частей, ея *числителемъ*. Поэтому въ дроби $\frac{2}{7}$ числитель будетъ 2, а знаменатель 7. Числитель и знаменатель, разсматриваемые вмѣстѣ, называются *членами* дроби. Самыя названія *числитель* и *знаменатель* приняты потому что первый изъ нихъ означаетъ, какъ уже сказано выше, *число* взятыхъ частей, а второй показываетъ или *знаменуетъ*, на сколько частей раздѣлена единица.

Результатъ дѣленія бо̀льшаго числа на мѐньшее, написанное въ видѣ дроби, какъ напримѣръ $\frac{11}{3}$, называется *неправильною дробью*; дѣлимое, какъ и въ *правильной* дроби, удерживаетъ названіе числителя, а дѣлитель, знаменателя. По отдѣленіи же частнаго числа отъ неправильной дроби, она принимаетъ названіе *смѣшанной*; такъ въ предъидущемъ примѣрѣ, въ которомъ $\frac{11}{5}=2\frac{1}{5}$, $2\frac{1}{5}$ будетъ *смѣшанною дробью*. Замѣтимъ, что и на-оборотъ, очень легко отъ вида $2\frac{1}{5}$ перейти къ неправильной дроби $\frac{11}{5}$: для этого стоитъ только помножить цѣлое число 2 на знаменатель 5, придать къ произведенію $2.5=10$ числитель 1, и подъ суммою $10+1=11$ подписать тотъ же знаменатель 5. Причина этого правила сдѣлается очевидною, когда примемъ въ соображеніе, что $2\frac{1}{5}$ можно принимать за результатъ дѣленія нѣкотораго числа на 5; частное, происшедшее отъ этого дѣленія, извѣстно, и равно 2-мъ, а остатокъ 1. Но какъ дѣлимое равно произведенію частнаго на дѣлитель, сложенному съ остаткомъ, то и заключаемъ, что *для приведенія къ дробному виду цѣлаго числа съ дробью, надлежитъ цѣлое число умножить на знаменатель дроби, потомъ къ этому произведенію придать числитель, и подъ суммою подписать знаменатель.*

§ 57. Изустное счисленіе дробей весьма просто: сперва про-

износится числитель, а потомъ число знаменателя, въ видѣ прилагательнаго, какъ показано ниже:

$\frac{1}{2}$ *одна вторая*, или, употребительнѣе: *половина.*

$\frac{1}{3}$ *одна третья*, или упот. *одна треть*, *треть.*

$\frac{1}{4}$ *одна четвертая*, или упот. *одна четверть*, *четверть.*

$\frac{1}{5}$ *одна пятая*, $\frac{1}{6}$ *одна шестая*, $\frac{1}{7}$ *одна седьмая* и такъ далѣе.

$\frac{2}{2}$ *двѣ вторыя* или *единица*, $\frac{3}{3}$ *три трети* или *единица.*

$\frac{2}{3}$ *двѣ трети*, $\frac{3}{4}$ *три четвертыя* или *три четверти.*

$\frac{3}{5}$ *три пятыя*, $\frac{6}{7}$ *шесть седьмыхъ.*

$\frac{21}{36}$ *двадцать одна тридцать шестая* и проч.

§ 58. Объяснимъ теперь различныя свойства дробей относительно ихъ увеличенія и уменьшенія. Прежде всего замѣтимъ, что когда имѣемъ двѣ дроби, у которыхъ равны или числители, или знаменатели, то можно прямо сказать, которая изъ нихъ больше. *При равныхъ знаменателяхъ, бо́льшая дробь будетъ та, у которой числитель больше*; такъ изъ двухъ дробей $\frac{8}{21}$ и $\frac{11}{21}$, вторая больше первой. Это слѣдуетъ изъ того, что величина частей, на которыя раздѣлена единица, одинакова въ обѣихъ дробяхъ, а число взятыхъ частей больше въ той дроби, у которой числитель больше. Напротивъ того, *при равныхъ числителяхъ, та дробь будетъ больше, у которой знаменатель меньше.* Напримѣръ, изъ двухъ дробей $\frac{13}{20}$ и $\frac{13}{36}$, первая больше второй, и это потому, что въ первой изъ нихъ части единицы будутъ больше чѣмъ во второй, а число взятыхъ частей одинаково для обѣихъ дробей.

При разныхъ числителяхъ и знаменателяхъ двухъ дробей, вообще нельзя тотчасъ рѣшить, которая больше. Мы покажемъ ниже, какимъ образомъ всякія дроби, и сколько бы ихъ не было, приводятся къ одному знаменателю; тогда уже не трудно будетъ сравнивать ихъ между собою.

§ 59. Изъ сказаннаго заключаемъ, что *всякая дробь увеличивается*: 1-е *когда увеличиваемъ ея числитель, не перемѣняя знаменателя* и 2-е *когда, не перемѣняя числителя, уменьшаемъ ея знаменатель.* Напротивъ того, *дробь уменьшается*: 1-е *когда уменьшаемъ ея числитель, не перемѣняя знаменателя* и 2-е *когда, не перемѣняя числителя, увеличиваемъ знаменатель.*

Возьмемъ для примѣра дробь $\frac{41}{85}$; увеличивая ея числитель, положимъ числомъ 32, получимъ

$$\frac{41+32}{85} \quad \text{или} \quad \frac{73}{85} > \frac{41}{85};$$

уменьшая знаменатель, напримѣръ числомъ 21, имѣемъ

$$\frac{41}{85-21} \quad \text{или} \quad \frac{41}{64} > \frac{41}{85}.$$

Напротивъ того

$$\frac{41-32}{85} \quad \text{или} \quad \frac{9}{85} < \frac{41}{85}$$

$$\frac{41}{85+21} \quad \text{или} \quad \frac{41}{106} < \frac{41}{85}.$$

Ясно, что дробь подавно увеличится, когда въ одно время увеличимъ ея числитель и уменьшимъ знаменатель, а напротивъ того уменьшится, когда уменьшимъ ея числитель и увеличимъ знаменатель. Если же въ одно время уменьшили или увеличили оба члена данной дроби, то нельзя прямо сказать, увеличилась ли она или уменьшилась, или перемѣнила ли даже свою величину.

§ 60. До сихъ поръ мы увеличивали и уменьшали члены дроби посредствомъ *сложенія* и *вычитанія*; но можно также увеличивать и уменьшать ихъ употребляя на тò *умноженіе* и *дѣленіе.* Разсмотримъ внимательно перемѣны, которыя произойдутъ отъ этого въ данной дроби. Возьмемъ для примѣра дробь $\frac{5}{72}$. Если умножимъ ея числитель на 2, то получимъ $\frac{10}{72}$

и эта новая дробь будетъ *вдвое* больше прежней, потому что число частей удвоилось, а величина самыхъ частей не перемѣнилась. Помножимъ числитель на 3; получимъ $\frac{15}{72}$, и эта дробь будетъ *втрое* болѣе данной, и такъ далѣе. Если раздѣлимъ знаменатель 72 на 2, то получимъ дробь $\frac{5}{36}$, которая будетъ болѣе первоначальной $\frac{5}{72}$, и именно *вдвое*, въ чёмъ легко увѣриться слѣдующимъ образомъ: знаменатель изъ 72 сдѣлался *вдвое менѣе*, обратившись въ 36; въ первомъ случаѣ единица была раздѣлена на 72 равныя части, а теперь только на 36; слѣдовательно, одна новая часть будетъ содержать въ себѣ *двѣ* прежнія, и какъ числители у обѣихъ дробей одинаковы, то вторая дробь, именно $\frac{5}{36}$, будетъ *вдвое болѣе* первой $\frac{5}{72}$. Но мы сей-часъ нашли, что $\frac{10}{72}$ также вдвое болѣе $\frac{5}{72}$; слѣдовательно дроби $\frac{10}{72}$ и $\frac{5}{36}$ равны между собою. Первую изъ нихъ мы получили умноживъ числитель данной дроби $\frac{5}{72}$ на 2, а вторую, раздѣливъ знаменатель на тò же число 2; поэтому будетъ

$$\frac{10}{72}=\frac{5}{36} \quad \text{или} \quad \frac{5.2}{72}=\frac{5}{72:2}.$$

Тò же самое увидимъ умноживъ числитель 5 на 3, и раздѣливъ знаменатель 72 на 3; въ первомъ случаѣ получимъ $\frac{5.3}{72}=\frac{15}{72}$, а во второмъ $\frac{5}{72:3}=\frac{5}{24}$, и каждая изъ этихъ дробей будетъ *втрое болѣе* первоначальной $\frac{5}{72}$; слѣдовательно, новыя дроби равны между собой, и получимъ

$$\frac{15}{72}=\frac{5}{24} \quad \text{или} \quad \frac{5.3}{72}=\frac{5}{72:3}.$$

И такъ, *умножая числитель дроби на* 2, *на* 3, *или вообще на какое ни есть цѣлое число, дробь во столько же разъ увеличится.* Равнымъ образомъ: *раздѣляя знаменатель на* 2, *на* 3, *или вообще на какое ни есть число, дробь во столько разъ увеличится, во сколько уменьшили ея знаменатель.*

Напротивъ того, *раздѣляя числитель дроби на число* 2, *или* 3, *или* 4 *и проч., или умножая ея знаменатель на* 2,

на 3, на 4 и проч. дробь уменьшится во столько разъ, сколько въ этомъ числѣ заключается единицъ. Такъ раздѣляя на 2 числитель дроби $\frac{8}{17}$, получимъ $\frac{4}{17}$, а умножая на 2 ея знаменатель, $\frac{8}{34}$; каждая изъ дробей $\frac{4}{17}$ и $\frac{8}{34}$ будетъ *вдвое менѣе* первоначальной $\frac{8}{17}$, и слѣдовательно

$$\frac{4}{17}=\frac{8}{34} \quad \text{или} \quad \frac{8:2}{17}=\frac{8}{17.2}.$$

Это свойство, по которому дроби уменьшаются, такъ же очевидно какъ и тò, по которому онѣ увеличиваются. Дѣйствительно, когда раздѣляемъ, положимъ на 2, числитель данной дроби, не перемѣняя ея знаменателя, то беремъ *вдвое менѣе* одинаковыхъ частей, почему и сама дробь становится *вдвое менѣе.* Умножая знаменатель на 2, мы уменьшаемъ въ *два раза* величину каждой части единицы, а какъ число частей во второмъ случаѣ не перемѣнится, то новое значеніе дроби будетъ *вдвое менѣе* прежняго.

§ 61. Доказанное въ предъидущемъ § приводитъ прямо къ слѣдующему свойству дробей: ***Величина дроби не перемѣнится, когда умножимъ въ одно время ея числитель и знаменатель, или раздѣлимъ ихъ на одно и тò же число.***

И въ самомъ дѣлѣ, умножая числитель на какое ни есть число, дробь увеличится во столько разъ, сколько въ этомъ числѣ содержится единицъ. Помножая потомъ знаменатель на тò самое число, новая дробь во столько же разъ уменьшится; слѣдовательно, по умноженіи обоихъ членовъ дроби на одинъ и тотъ же множитель, величина ея не перемѣнится. Подобнымъ образомъ, раздѣляя числитель, уменьшаемъ дробь во столько разъ, сколько въ дѣлителѣ содержится единицъ; напротивъ того, раздѣляя знаменатель на тотъ же самый дѣлитель, увеличиваемъ дробь во столько разъ, во сколько прежде уменьшили; слѣдовательно, по раздѣленіи обоихъ членовъ дроби на одно и тò же число, величина ея не перемѣнится.

§ 62. Изъ этого слѣдуетъ заключить, что данная дробь можетъ быть изображена во столькихъ видахъ, сколько угодно. Напримѣръ, имѣя дробь $\frac{2}{3}$, мы можемъ чрезъ умноженіе ея числителя и знаменателя на числа 2, 3, 4, 5 и проч. составить новыя дроби, которыя всѣ будутъ равны первоначальной $\frac{2}{3}$. И такъ

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}=\frac{1}{15}=\text{и проч.}$$

Изъ всѣхъ этихъ дробей, равныхъ между собою, первая, именно $\frac{2}{3}$, будетъ по виду самая простая.

§ 63. Когда числитель и знаменатель данной дроби дѣлятся безъ остатка на одно и то̀ же число, то, произведя дѣленіе, получимъ новую дробь, равную данной (§ 61), но которая по виду будетъ проще. Такъ раздѣляя оба члена дроби $\frac{168}{462}$ сперва на 2, потомъ на 3, наконецъ на 7, получимъ:

$$\frac{168}{462}=\frac{84}{231}=\frac{56}{154}=\frac{24}{66}.$$

Раздѣляя оба члена послѣдней дроби $\frac{24}{66}$ на 2, найдется $\frac{12}{33}$; если еще раздѣлимъ числитель и знаменатель дроби $\frac{12}{33}$ на число 3, то найдемъ $\frac{4}{11}$. И такъ

$$\frac{24}{66}=\frac{12}{33}=\frac{4}{11},$$

и слѣдовательно $\frac{168}{462}=\frac{4}{11}$. Изъ этого примѣра видимъ, что дробь $\frac{168}{462}$, довольно сложная, могла быть приведена къ виду очень простому $\frac{4}{11}$ посредствомъ дѣленія на нѣкоторыя числа, именно на 2, на 3 и на 7. Для многихъ другихъ дробей подобное сокращеніе бываетъ возможно. Самое дѣйствіе, посредствомъ котораго производится это упрощеніе, называется *сокращеніемъ дробей* или *приведеніемъ ихъ къ простѣйшему виду*. Сокращеніе есть дѣйствіе весьма выгодное при вычисленіяхъ съ дробными числами. И такъ, прежде нежели

приступимъ къ правиламъ, по которымъ производятся основныя дѣйствія надъ дробями, займемся способами, служащими для ихъ *сокращенія*.

ОТДѢЛЪ IV.

Способы для сокращенія дробей, основанные на признакахъ дѣлимости цѣлыхъ чиселъ и на опредѣленіи общаго наибо̀льшаго дѣлителя.

§ 64. Въ § 63 предъидущаго Отдѣла было замѣчено, что иногда дроби могутъ быть замѣнены другими, равными имъ, и болѣе простыми. Такъ, напримѣръ, дробь $\frac{168}{462}$ равна $\frac{4}{11}$; къ такому сокращенію мы были приведены послѣдовательнымъ раздѣленіемъ числителя 168 и знаменателя 462 на числа 2, 3 и 7. Замѣтимъ, что если бы, съ самаго начала, раздѣлили оба члена данной дроби на произведеніе 2.3.7 этихъ трехъ дѣлителей, то есть на число 42, то прямо бы нашли искомый сокращенный видъ $\frac{4}{11}$. Здѣсь число 42 есть наибо̀льшій изъ дѣлителей, раздѣляющихъ въ одно время 168 и 462 безъ остатка, почему оно и будетъ ***общимъ наибо̀льшимъ дѣлителемъ*** двухъ чиселъ 168 и 462.

Въ этомъ примѣрѣ упрощеніе дроби удалось, потому что оба ея члена дѣлились на одни и тѣ же числа, именно на 2, на 3 и на 7. Но часто случается, что числитель и знаменатель не имѣютъ никакихъ общихъ дѣлителей, какъ напримѣръ въ дробяхъ $\frac{21}{55}$, $\frac{15}{31}$, $\frac{3}{7}$ и проч. Теперь представляется вопросъ, какъ по данной дроби узнать, можетъ ли она быть сокращена подобнымъ образомъ, и если можетъ, то какъ найти дѣлители, общіе обоимъ ея членамъ?

Слѣдуя пріёму, употребленному въ § 63 для сокращенія дроби $\frac{168}{462}$, надлежало бы для всякой другой испытывать по порядку дѣлители 2, 3, 4, 5, 6, 7 и проч., то есть дѣлить

на эти числа оба члена данной дроби; тѣ изъ этихъ дѣленій, отъ которыхъ произошли остатки, были бы трудомъ потеряннымъ, потому что не вели бы къ упрощенію разсматриваемой дроби. По этой причинѣ очень полезно имѣть легкіе способы чтобъ узнавать прямо, не производя полнаго дѣленія, дѣлится ли нà-цѣло, то есть безъ остатка, данное число на которые нибудь изъ дѣлителей 2, 3, 4, 5, 6, 7 и проч. Эти легкіе способы или пріёмы, по которымъ можно судить о дѣлимости нà-цѣло одного числа на другое, называются *признаками дѣлимости чиселъ.* Займемся теперь этимъ предметомъ; мы увидимъ, что сверхъ употребленія его при сокращеніи дробей, онъ ознакомитъ насъ съ нѣкоторыми полезными свойствами цѣлыхъ чиселъ. Потомъ покажемъ способъ для опредѣленія *общаго наибóльшаго дѣлителя*, который непосредственно ведетъ къ *сокращенію дробей.*

О дѣлимости цѣлыхъ чиселъ.

§ 65. Разсматривая произведенія, заключающіяся въ таблицѣ умноженія, мы съ перваго взгляда видимъ, что между ними недостаетъ многихъ изъ 81 числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6....... до 81, наибòльшаго изъ всѣхъ произведеній. Всѣхъ недостающихъ чиселъ счётомъ *пятьдесятъ*, и между прочими не находимъ слѣдующихъ, написанныхъ по порядку ихъ величинъ: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 22, 23, 26, 29, 31, 33 и проч. Разсмотримъ внимательно какого свойства могутъ быть эти недостающія числа. Прежде всего замѣтимъ, что ни одно изъ нихъ не изображаетъ произведенія двухъ множителей, не превышающихъ 9-ти; въ противномъ случаѣ, оно находилось бы въ таблицѣ умноженія между произведеніями. И такъ, если эти числа изображаютъ произведенія, то по крайней мѣрѣ одинъ изъ множителей будетъ болѣе 9-ти, и поэтому не менѣе 10. Но наимѐньшее произведеніе, какое можно со-

ставить принявъ 10 за одинъ изъ множителей, есть 2.10=20; слѣдовательно, въ приведенномъ сей-часъ ряду, всѣ числа, мѐньшія 20, не будутъ изображать произведеній; числа, о которыхъ говоримъ, суть слѣдующія:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 и 19.

Эти *девять* чиселъ, не разлагающіяся на множители, или, иначе, не имѣющія никакихъ дѣлителей, кромѣ единицы и самихъ себя, называются *простыми* или *первыми числами.* Всякое же число, разлагающееся на множители, то есть равное произведенію двухъ или нѣсколькихъ чиселъ, отличныхъ отъ единицы и отъ даннаго числа, называется *сложнымъ.*

Что̀ же касается до чиселъ, превышающихъ 20, именно: 22, 23, 26, 29, 31, 33 и проч., то объ нихъ нельзя прямо судить какъ о первыхъ девяти; нѣкоторыя изъ нихъ простыя, а другія сложныя: такъ 23, 29, 31 и проч., неразлагающіяся на множители, суть числа *простыя*, а 22, 26, 33 и проч. *сложныя*, потому что 22 = 2.11, 26 = 2.13, 33 = 3.11 и проч.

Если бы распространили таблицу умноженія на числа, составленныя изъ нѣсколькихъ цифръ, то увидѣли бы какъ и выше, что въ произведеніяхъ не находится множества чиселъ, между которыми очень значительная часть принадлежитъ къ *простымъ*; такъ до предѣла 100, нашли бы слѣдующія *двадцать шесть простыхъ чиселъ*:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 и 97 (*).

Когда два числа не имѣютъ никакого *общаго дѣлителя* (не считая единицы), то есть такого, который бы раздѣлялъ нà-цѣло каждое изъ нихъ, то эти два числа называются *взаимно-про-*

(*) Въ концѣ книги помѣщена таблица всѣхъ простыхъ чиселъ отъ 1 до 2039.

стыми или *простыми между собою.* Таковы напримѣръ числа 6 и 35, 25 и 27, 53 и 88 и проч. Замѣтимъ что числа, простыя между собой, могутъ быть оба сложныя, или оба простыя, или еще, одно сложное, а другое простое.

Сложныя числа, относительно множителей своихъ, часто называются ихъ *кратными.* Такъ 21 есть *кратное* 3-хъ, а также и 7-ми, потому что $21=3.7$. Кратныя 2-хъ, то есть числа, раздѣляющіяся на-цѣло на 2, называются *чётными*, а тѣ, которыя не дѣлятся на 2, *нечётными.*

§ 66. Для разложенія *сложнаго числа* на *простые множители*, можно поступать слѣдующимъ образомъ: пусть дано число 360; дѣлимъ его на наимѐньшее простое число 2, получаемъ частное 180, которое дѣлимъ опять на 2, и находимъ 90; число 90 также дѣлимо на 2, и, по раздѣленіи, даетъ частное 45; 45, какъ число *нечётное*, не дѣлится на 2. И такъ

$$360=2\times2\times2\times45.$$

Послѣ простаго числа 2, слѣдуетъ, по порядку, испытать дѣлитель 3; дѣленіе 45 на 3 удается, при чёмъ получается частное 15. Число 15 также дѣлимо на 3, и будетъ $45=3\times3\times5$. Наконецъ, такъ какъ частное 5 само число простое, которое поэтому не разлагается на простые множители, то и получимъ искомое разложеніе

$$360=2\times2\times2\times3\times3\times5.$$

Для сокращенія, вмѣсто $2\times2\times2$, то есть куба числа 2, условились писать 2^3; подобнымъ образомъ, вмѣсто 3×3 или квадрата 3-хъ, пишутъ 3^2; поэтому

$$360=2^3.\,3^2.\,5.$$

И вообще, сколько бы разъ не повторился одинъ и тотъ же простой множитель, дѣйствіе означается какъ сей-часъ показано; пишутъ множитель, а надъ нимъ, съ правой стороны,

число, означающее степень, въ которую этотъ множитель возвышается (§ 37); такъ, напримѣръ, $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$, $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$ и проч.

Совершенно подобнымъ образомъ слѣдуетъ поступать при разложеніи всякаго цѣлаго числа на простые его множители, именно: *данное число дѣлимъ, пока возможно, на 2, потомъ на 3, далѣе на 5, однимъ словомъ, каждый разъ какъ дѣленіе уже не удается, переходимъ къ ближайшему простому числу въ ряду 2, 3, 5, 7, 11, 13 и проч. Дѣйствіе кончится, когда полученное частное само будетъ простымъ числомъ.*

Для полученія всѣхъ сложныхъ дѣлителей предложеннаго числа по найденному его разложенію, стоитъ только найти всѣ возможныя, но различныя между собой произведенія простыхъ множителей, равныхъ и неравныхъ, бравъ ихъ сперва пò-два, потомъ пò-три, по-четыре и такъ далѣе. Поэтому, для числа 360, равнаго $2^3 . 3^2 . 5$, слѣдуетъ употребить простые множители 2, 2, 2, 3, 3, 5. Двойныя произведенія, различныя между собою, будутъ:

$$2.2 = 4,\quad 2.3 = 6,\quad 2.5 = 10,\quad 3.3 = 9,\quad 3.5 = 15;$$

тройныя:

$$2.2.2 = 8,\quad 2.2.3 = 12,\quad 2.2.5 = 20,\quad 2.3.3 = 18,$$
$$2.3.5 = 30,\quad 3.3.5 = 45;$$

четверныя:

$$2.2.2.3 = 24,\quad 2.2.2.5 = 40,\quad 2.2.3.3 = 36,\quad 2.2.3.5 = 60,$$
$$2.3.3.5 = 90;$$

пятерныя:

$$2.2.2.3.3 = 72,\quad 2.2.2.3.5 = 120,\quad 2.2.3.3.5 = 180;$$

наконецъ, произведеніе 2.2.2.3.3.5 всѣхъ шести простыхъ множителей, равно данному числу 360. И такъ, 360 имѣетъ 4 простые дѣлителя (въ томъ числѣ единицу) и 20 сложныхъ;

эти дѣлители, по порядку ихъ величинъ, будутъ: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.

По извѣстному разложенію числа на простые его множители легко найти, сколько оно имѣетъ всѣхъ дѣлителей. Для этого, *должно сосчитать сколько разъ въ разложеніе даннаго числа входитъ каждый изъ простыхъ его дѣлителей, и каждое число разъ увеличить одною единицею; произведеніе всѣхъ чиселъ, найденныхъ такимъ образомъ, изобразитъ искомое число всѣхъ дѣлителей.* Такъ для числа $360 = 2^3.3^2.5$ найдемъ: простой дѣлитель 2 входитъ *три* раза, 3 *два* раза, 5 *одинъ* разъ; увеличивая *три*, *два* и *одинъ* одною единицею, получимъ числа 4, 3 и 2; произведеніе $4.3.2 = 24$ покажетъ, сколько число 360 имѣетъ дѣлителей, включая сюда *единицу* и самое число 360. Дѣйствительно, такъ какъ $360 = 2^3.\,3^2.\,5$, то каждое изъ 4 или $3+1$ чиселъ

$$1,\ \ 2,\ \ 2^2,\ \ 2^3$$

будетъ дѣлителемъ 360; умножая эти четыре числа сперва на 3, потомъ на 3^2, получимъ $4+4=4\times2=8$ новыхъ дѣлителей:

$$3,\ \ 2.3,\ \ 2^2.\,3,\ \ 2^3.\,3$$
$$3^2,\ \ 2.3^2,\ \ 2^2.3^2,\ \ 2^3.\,2^2.$$

И такъ, число $2^3.3^2$ будетъ имѣть $4+4\times2=4\times3$ или $(3+1)(2+1)$, то есть 12 дѣлителей. Умножая каждый изъ сихъ послѣднихъ на 5, найдемъ остальныя 12 чиселъ, раздѣляющихъ нà-цѣло 360. Слѣдовательно, полное число дѣлителей для 360 опредѣлится суммою $4\times3+4\times3$, равною произведенію $4\times3\times2$, или

$$(3+1)(2+1)(1+1)=24,$$

сообразно съ предложеннымъ сей-часъ общимъ правиломъ.

Необходимо также замѣтить, что *всякое цѣлое число допускаетъ только одно разложеніе на простые множители.*

Такъ напримѣръ, изъ разложенія $360 = 2^3 . 3^2 . 5$ заключаемъ: 1° что число 360, кромѣ простыхъ дѣлителей 2, 3 и 5, другихъ не имѣетъ; 2° что оно дѣлится на кубъ 2-хъ, на квадратъ 3-хъ и на 5, а на высшія степени этихъ самыхъ простыхъ чиселъ 2, 3, и 5 дѣлиться нà-цѣло не можетъ. Тò же самое должно разумѣть и объ разложеніи всякаго числа на простые его множители.

При разложеніи чиселъ, послѣдовательное испытаніе простыхъ дѣлителей 2, 3, 5, 7, 11,....было бы слишкомъ продолжительно, и, во многихъ случаяхъ, пришлось бы дѣлать неудачныя попытки, какъ и при сокращеніи дробей (§ 64). Оба дѣйствія отчасти упростятся при пособіи нѣкоторыхъ ***признаковъ дѣлимости чиселъ***, доказательство которыхъ основано на трехъ *Предложеніяхъ*, излагаемыхъ ниже.

§ 67. Предложеніе I-ое. ***Когда цѣлое число разложено на части, и каждая изъ нихъ дѣлится на извѣстный дѣлитель, то и предложенное число будетъ дѣлиться безъ остатка на этотъ самый дѣлитель.***

Пусть данное число будетъ 21; части или слагаемыя, на которыя мы разлагаемъ его: 12, 6 и 3, а дѣлитель 3. Напишемъ эти части, изображая каждую изъ нихъ совокупностію единицъ, и отдѣляя ихъ чертами въ видѣ:

$$\overbrace{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1}^{12} \mid \overbrace{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1}^{6} \mid \overbrace{1\ 1\ 1}^{3}$$

Чтобъ раздѣлить 21 единицу на 3, мы можемъ поступать слѣдующимъ образомъ: отдѣляемъ отъ лѣвой руки къ правой 3 единицы, потомъ опять 3, и такъ далѣе до тѣхъ поръ, пока не останется менѣе 3-хъ единицъ. Число подобныхъ дѣйствій изобразитъ *частное*, а чтò останется съ правой стороны, *остатокъ*. Легко видѣть, что здѣсь остатка не будетъ: дѣйствительно, такъ какъ по предположенію первая часть 12

дѣлится на 3, то отсчитывая по 3 единицы *четыре* раза, четвертая черта изъ служащихъ для отдѣленія каждой совокупности *трехъ* единицъ, упадетъ на прежнюю черту, отдѣляющую первую часть отъ второй. Тò же самое случится и съ остальными двумя частями 6 и 3, какъ означено ниже густыми чертами:

12 6 3
1 1 1 | 1 1 1 | 1 1 1 | 1 1 1 | 1 1 1 | 1 1 1 | 1 1 1 |

Ясно, что если бы одна изъ частей, напримѣръ послѣдняя, не дѣлилась безъ остатка на данный дѣлитель, то и предложенное число не дѣлилось бы на него, а давало тотъ же остатокъ, какъ и послѣдняя часть. И такъ

Слѣдствіе 1-ое. ***Когда, при двухъ слагаемыхъ, одно дѣлится, а другое не дѣлится на какое нибудь данное число, то и сумма этихъ двухъ слагаемыхъ не будетъ дѣлиться на него.***

На основаніи этого свойства легко доказать существованіе безчисленнаго множества простыхъ чиселъ. Въ самомъ дѣлѣ, еслибъ предположили, что количество ихъ ограниченное, то одно изъ нихъ было бы самое большое; пусть, напримѣръ, наибòльшее простое число будетъ 19, и вообразимъ что составлено произведеніе всѣхъ 18-ти чиселъ 2, 3, 4, 5.......до 19; оно очевидно дѣлится на каждое изъ цѣлыхъ чиселъ до 19 включительно. Придадимъ къ этому произведенію единицу, которая не дѣлится ни на какое число; сумма 2.3.4.5.....19+1 разсматриваемыхъ двухъ слагаемыхъ не будетъ дѣлиться ни на одно изъ чиселъ 2, 3, 4, 5.....до 19 (Слѣдствіе I-ое), а изобразитъ или простое число, или произведеніе такихъ множителей, изъ которыхъ ни одинъ не равенъ числамъ, взятымъ въ ряду 2, 3, 4, 5.....до 19. И такъ, существуютъ простыя числа, бòльшія 19. Къ подобному заключенію привело бы насъ

разсматриваніе всякаго другаго простаго числа, какъ бы оно велико не было; слѣдовательно, количество простыхъ чиселъ безконечно.

Слѣдствіе 2-ое. *Число, дѣлящее безъ остатка другое, а равно какую ни есть его часть, раздѣлитъ на̀-цѣло и другую.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ извѣстно, что число 21 и часть его 15 дѣлятся на 3; чтобъ показать, что и другая его часть 6 дѣлится безъ остатка на 3, пишемъ 21 въ видѣ:

$$\overbrace{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1}^{15}\ \big|\ \overbrace{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1}^{6}$$

и для раздѣленія этого числа на 3, начинаемъ отсчитывать отъ лѣвой руки по 3 единицы; такимъ образомъ, послѣ 5-ти дѣйствій, наблюдая что 15 дѣлится на 3, дойдемъ до первой черты, отъ которой останется вправо 6 единицъ; но какъ частное число должно быть цѣлымъ по предположенію, то дѣлитель 3 будетъ заключаться цѣлое число разъ въ 6; слѣдовательно 6 дѣлится безъ остатка на 3.

Что̀ показано здѣсь на числѣ 21, разложенномъ на двѣ части 15 и 6, при дѣлителѣ 3, очевидно справедливо и для всякаго другаго числа, разложеннаго на произвольныя слагаемыя, и при какомъ угодно дѣлителѣ.

§ 68. Предложеніе 2-ое. ***Когда данное число дѣлится на произведеніе двухъ или нѣсколькихъ чиселъ, то оно будетъ дѣлиться и на каждое изъ нихъ порознь.***

Пусть дано число $30 = 5.6$, раздѣляющееся на̀-цѣло на $6 = 2.3$. Надобно показать, что 30 будетъ дѣлиться порознь на 2 и на 3. Для этого изобразимъ число 30 *пятью* рядами, изъ которыхъ каждый заключаетъ по *шести* единицъ:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Такъ какъ 6 дѣлится нà-цѣло на 2, а также и на 3, то отдѣляя въ каждомъ ряду *пò-двѣ* единицы, а потомъ *пò-три*, получимъ

Дѣленіе на 2:		
1 1	1 1	1 1
1 1	1 1	1 1
1 1	1 1	1 1
1 1	1 1	1 1
1 1	1 1	1 1

Дѣленіе на 3:	
1 1 1	1 1 1
1 1 1	1 1 1
1 1 1	1 1 1
1 1 1	1 1 1
1 1 1	1 1 1

Изъ этихъ двухъ табличекъ оказывается очевиднымъ образомъ, что дѣленіе числа 30 на 2 и на 3 совершилось безъ остатка. Сосчитавъ въ первой изъ нихъ совокупности *двухъ* единицъ, найдемъ частное 15, а во второй, совокупности *трехъ* единицъ, получимъ частное 10.

Подобное разложеніе всякаго другаго числа, раздѣляющагося нá-цѣло на какой ни есть сложный дѣлитель, приведетъ насъ къ заключенію, что данное число дѣлится безъ остатка на каждый изъ множителей того самого дѣлителя.

§ 69. Предложеніе 3-е. ***Когда число дѣлится порознь на два или на нѣсколько взаимно-простыхъ чиселъ, то оно будетъ дѣлимо и на произведеніе ихъ.***

Положимъ извѣстно, что какое нибудь число, напримѣръ 1260, дѣлится порознь на взаимно-простыя числа 9 и 20; требуется показать, что оно будетъ дѣлиться и на произведеніе ихъ $9 \times 20 = 180$. Если не допустимъ этой дѣлимости, то раздѣливъ 1260 на 180, получимъ частное и остатокъ; послѣдній долженъ быть менѣе 180, напримѣръ 179. И такъ, въ этомъ предположеніи, въ силу § 40, 1260 будетъ равняться произведенію числа 180 на найденное частное, сложенному съ полученнымъ остаткомъ 179. Такъ какъ первый и второй членъ равенства, о которомъ говорится, дѣлятся нà-цѣло на 9 и на 20, то и остатокъ долженъ дѣлиться на эти

самыя числа (Слѣдствіе 2-ое Предложенія I-го). Слѣдовательно остатокъ 179 будетъ въ одно время кратнымъ чиселъ 9 и 20; сверхъ того, какъ онъ менѣе произведенія $9 \times 20 = 180$, то раздѣливъ его на 9, частное будетъ менѣе 20, положимъ 19, а раздѣливъ на 20, менѣе 9, напримѣръ 8. Такимъ образомъ получимъ

$$\frac{179}{9} = 19 \quad \text{и} \quad \frac{179}{20} = 8.$$

или

$$179 = 9.19 \text{ и } 179 = 20.8, \text{ откуда } 9.19 = 20.8.$$

Но подобное равенство не можетъ состояться по той причинѣ, что всякое число, а слѣдовательно и 9.19, или равное ему по предположенію 20.8, допускаетъ только одно разложеніе на простые множители (§ 66). Дѣйствительно, такъ какъ числа 9 и 20 *взаимно-простыя*, то всѣ множители, входящіе въ число 20, должны входить въ 19, а этого не можетъ быть, потому что $19 < 20$. Равнымъ образомъ, всѣ множители, входящіе въ 9, должны входить въ число 8, что̀ также невозможно, потому что $8 < 9$. И такъ, равенство

$$9.19 = 20.8,$$

или всякое другое, выведенное въ сдѣланномъ выше предположеніи, не можетъ имѣть мѣста, изъ чего непосредственно заключаемъ о справедливости Предложенія 3-го *).

Изъ доказаннаго сей-часъ свойства можно заключить о несократимости дроби, имѣющей числителемъ и знаменателемъ взаимно-простыя числа. И такъ

Слѣдствіе. ***Дробь, имѣющая числителемъ и знаменателемъ взаимно-простыя числа, не можетъ быть изображена въ мѐньшихъ числахъ.***

(*) Въ Примѣчаніи, помѣщенномъ въ концѣ книги, приведено другое доказательство этого *Предложенія*.

Въ самомъ дѣлѣ, еслибъ, напримѣръ, разсматривали дробь $\frac{9}{20}$, въ которой 9 и 20 взаимно-простыя числа, и положили бы, противно Слѣдствію, что она равна простѣйшей дроби $\frac{8}{19}$, то получили бы равенство

$$\frac{9}{20} = \frac{8}{19} \text{ или } 9.19 = 20.8,$$

которое, какъ сей-часъ видѣли, невозможно.

§ 70. Приступаемъ теперь къ самымъ *признакамъ дѣлимости чиселъ*. Сперва займемся *простыми* дѣлителями 2, 3, 5, 7, 11, 13, а потомъ *сложными* 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16.

Числа, оканчивающіяся одною изъ чётныхъ цифръ 0, 2, 4, 6, 8, дѣлятся на-цѣло на 2. Дѣйствительно, всякое цѣлое число, бо̀льшее 9, состоитъ изъ простыхъ единицъ и извѣстнаго числа *десятковъ*, включая сюда сотни даннаго числа, его тысячи и проч.; но какъ одинъ десятокъ, а слѣдовательно и всякое кратное 10-ти, дѣлится на 2 (§ 68, Предложеніе 2-ое), то для дѣлимости даннаго числа на 2 необходимо чтобы простыя его единицы дѣлились на 2 (§ 67, Слѣдствіе 2-е Предложенія 1-го), и поэтому изображались одною изъ чётныхъ цифръ 2, 4, 6, 8. Къ этимъ четыремъ цифрамъ слѣдуетъ присовокупить и *нуль*, ибо число, оканчивающееся нулемъ, какъ кратное 10-ти, будетъ также дѣлиться на 2.

Число дѣлится на 3, когда сумма его цифръ дѣлима на 3 безъ остатка. Такъ число 4239 дѣлится на-цѣло на 3, потому что $4+2+3+9=18$, а 18 дѣлится на 3, что̀ можно узнать или чрезъ непосредственное дѣленіе, или сложивъ опять цифры $1+8=9$, а $\frac{9}{3}$ = цѣлому числу 3.

Чтобъ удостовѣриться въ справедливости этого признака, замѣтимъ что

$$10 = 9 + 1$$
$$100 = 99 + 1$$
$$1000 = 999 + 1$$

и такъ далѣе.

Если разложимъ теперь данное число, напримѣръ 4239, на части 9, 30, 200 и 4000, то, въ слѣдствіе предъидущихъ равенствъ, получимъ

$$9 = 9$$
$$30 = 9.3 + 3$$
$$200 = 99.2 + 2$$
$$4000 = 999.4 + 4.$$

Сложивъ эти числа, и написавъ простыя единицы вмѣстѣ, найдемъ

$$4239 = 9.3 + 99.2 + 999.4 + 9 + 3 + 2 + 4.$$

Вторая часть этого равенства состоитъ изъ слагаемыхъ: 9.3, 99.2, 999.4 и $4 + 2 + 3 + 9 = 18$. Первыя три дѣлятся на 9, а слѣдовательно и на 3; поэтому, такъ какъ послѣднее слагаемое 18, именно *сумма цифръ* даннаго числа 4239, дѣлится безъ остатка на 3, то и 4239 будетъ дѣлиться нà-цѣло на 3 (§ 67, Предложеніе 1-ое).

Очевидно, что предложенный сей-часъ признакъ для дѣлителя 3, равно справедливъ и для дѣлителя 9. И такъ цѣлое число дѣлится на 9, когда сумма его цифръ дѣлима на 9. Напримѣръ для числа 23859 имѣетъ $2+3+8+5+9=27$, и какъ 27 дѣлится на 9, то и 23859 будетъ дѣлимо на это число.

Когда сумма цифръ даннаго числа, по раздѣленіи на 3 или на 9, дастъ остатокъ, то ясно, что отъ дѣленія предложеннаго числа на 3 или на 9, произойдетъ тотъ же самый остатокъ. Такъ число 23675, по раздѣленіи на 3, даетъ остатокъ 2, потому что $2+3+6+7+5 = 23$, а остатокъ отъ 23-хъ, при дѣлителѣ 3, есть 2. Остатокъ дѣленія того же числа 23675 на 9, будетъ 5, потому что сумма его цифръ 23, по раздѣленіи на 9, даетъ 5 въ остаткѣ. Этотъ остатокъ очевидно получится также сложивъ цифры 2 и 3 найденной суммы 23.

Всякое число, оканчивающееся *нулемъ*, или цифрою 5, дѣлится нà-цѣло на 5, потому что десятки его, включая сюда сотни, тысячи и проч., дѣлятся безъ остатка на 5. При вся-

кой другой окончательной цифрѣ, остатокъ дѣленія даннаго числа на 5 будетъ равенъ этой самой цифрѣ когда она менѣе 5-ти, а избытку ея предъ 5-ю, когда она болѣе дѣлителя 5. Такъ остатокъ дѣленія числа 283 на 5 будетъ 3, а для числа 639, получимъ остатокъ 4.

Для дѣлимости на простыя числа 7, 11 и 13 имѣемъ общій признакъ, а именно: разлагаемъ данное число на трехъ-цифренныя грани отъ правой руки къ лѣвой, при чёмъ послѣдняя грань можетъ заключать въ себѣ менѣе трехъ цифръ, то есть одну или двѣ. Потомъ беремъ сумму 1-ой, 3-ей, 5-ой и вообще всѣхъ граней нечётнаго порядка; находимъ также сумму 2-ой, 4-ой, 6-ой и вообще всѣхъ граней чётнаго порядка. Вычтя мѐньшую изъ найденныхъ двухъ суммъ изъ бо̀льшей, получимъ извѣстную разность. Если эта разность дѣлится безъ остатка на одно изъ трехъ простыхъ чиселъ 7, 11, 13, то и предложенное число дѣлится на̀-цѣло на тотъ же дѣлитель (*).

Напримѣръ, дано число 6511509594436; требуется узнать, дѣлится ли оно на̀-цѣло на 7. Разлагая его на грани, получаемъ

5-ая	4-ая	3-я	2-ая	1-ая
6	511	509	594	436.

Сумма 1-ой, 3-ей и 5-ой граней, то есть $436+509+6=951$, а 2-й и 4-й, то есть $594+511=1105$; такъ какъ разность $1105-951=154$ дѣлится на 7 безъ остатка, то заключаемъ, что и предложенное число дѣлится на̀-цѣло на 7.

Примѣръ для простаго дѣлителя 11. Дано число 92019279.

3-я	2-ая	1-ая
92	019	279.

Сумма 1-ой и 3-ей граней $279+92=371$; вычтя изъ этой суммы 2-ую грань 19, получимъ $371-19=352$, и какъ 352

(*) Доказательство этого признака помѣщено въ Отдѣлѣ IX.

дѣлится на 11 безъ остатка, то заключаемъ, что и предложенное число дѣлится на-цѣло на 11.

Примѣръ для простаго дѣлителя 13. Дано число............ 88155990924 7485. Сумма нечётныхъ граней

$$485 + 909 + 881 = 2275,$$

сумма же чётныхъ

$$247+559=806.$$

Такъ какъ разность $2275 - 806 = 1469$, или, еще проще, разность $469 - 1 = 468$ двухъ граней 469 и 1 числа 1469, дѣлится безъ остатка на 13, то и предложенное число дѣлимо на 13.

Для числа 11 можно употреблять и другой, болѣе простой признакъ: по данному числу составляемъ сумму 1-ой, 3-ей, 5-й и вообще всѣхъ цифръ нечётнаго порядка, начиная счётъ отъ правой или отъ лѣвой руки по произволенію; складываемъ также цифры чётнаго порядка, и получаемъ новую сумму. Если разность этихъ двухъ суммъ дѣлится на-цѣло на 11, то и предложенное число дѣлимо на 11 безъ остатка (*). Пусть будетъ, напримѣръ, число 4017244; сумма $4+1+2+4=11$, также $0+7+4 = 11$; разность $11 - 11 = 0$. Изъ этого заключаемъ, что данное число дѣлимо на 11, потому что *нуль* дѣлится безъ остатка на всякое число, при чёмъ какъ въ частномъ, такъ и въ остаткѣ будетъ *нуль*. Это замѣчаніе на счётъ разности, равной нулю, относится и къ предложенному предъ симъ общему признаку для дѣлителей 7, 11 и 13.

§ 71. Переходимъ теперь къ признакамъ дѣлимости на сложные дѣлители.

Всякое число дѣлится на 4, когда его десятки, вмѣстѣ съ единицами, дѣлятся безъ остатка на 4. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ всякое число можно представить себѣ составленнымъ изъ

(*) Смот. **Отдѣлъ IX.**

десятковъ съ единицами и извѣстнаго числа *сотень*, включая сюда тысячи, десятки тысячь и проч., и какъ одна сотня дѣлится на 4, то, для дѣлимости даннаго числа на 4, необходимо чтобы десятки съ единицами, именно послѣднія двѣ его цифры, дѣлились на-цѣло на 4.

Основываясь на этомъ признакѣ можно тотчасъ рѣшить, будетъ ли предложенный годъ *простой* или *високосный*. Для этого стоитъ только раздѣлить на 4 число, изображаемое двумя послѣдними цифрами даннаго года: если найдется остатокъ, то годъ *простой*, если не будетъ остатка, то годъ *високосный*. Такъ 1849 годъ *простой*, ибо раздѣливъ 49 на 4 получаемъ въ остаткѣ 1, а 1852 годъ *високосный*, потому что $\frac{52}{4}$ = цѣлому числу 13, безъ остатка.

Цѣлое число будетъ дѣлиться на 6, когда оно дѣлимо порознь на 2 и на 3, ибо $6 = 2.3$ (§ 69, Предложеніе 3-е). И такъ, для дѣлимости числа на 6 должно: 1) чтобъ оно оканчивалось чётною цифрою и 2) чтобы сумма его цифръ дѣлилась на 3.

Данное число будетъ дѣлиться на 8, когда его сотни, вмѣстѣ съ десятками и единицами, дѣлятся на-цѣло на 8. Это слѣдуетъ изъ того, что цѣлое число составлено изъ извѣстнаго числа *тысячь*, съ присовокупленіемъ трехъ низшихъ разрядовъ, именно сотень, десятковъ и простыхъ единицъ; а какъ одна тысяча дѣлится на-цѣло на 8, то для дѣлимости даннаго числа на 8, необходимо чтобы сотни его вмѣстѣ съ десятками и единицами, дѣлились на 8. Такъ 38744 дѣлится безъ остатка на 8, потому что $\frac{744}{8}$ = цѣлому числу 93.

Признакъ дѣлимости чиселъ на 9 подобенъ признаку, найденному для дѣлителя 3, и предложенъ уже выше (§ 70).

Для дѣлимости числа на 10, оно очевидно должно оканчиваться *нулемъ*. Если число оканчивается двумя нулями, то оно дѣли-

мо на 100; при трехъ окончательныхъ нуляхъ, число дѣлится на 1000 и такъ далѣе.

Такъ какъ 12 равняется произведенію двухъ взаимно-простыхъ чиселъ 3 и 4, то для дѣлимости даннаго числа на 12, надобно (§ 69 Предложеніе 3-е): 1) чтобы сумма его цифръ дѣлилась на 3 и 2) чтобъ его десятки, вмѣстѣ съ единицами, дѣлились на 4.

Для дѣлимости числа на 14, равнаго произведенію 2.7, надобно: 1) чтобъ оно оканчивалось чётною цифрою и 2) чтобъ оно, сверхъ того, дѣлилось на 7, что̀ узнаётся по приведенному выше признаку.

Такъ какъ $15=3.5$, то для дѣлимости цѣлаго числа на 15, необходимо: 1) чтобы сумма его цифръ дѣлилась на̀-цѣло на 3 и 2) чтобъ оно оканчивалось *нулемъ* или цифрою 5. Число 42615 дѣлится на 15, потому что $\frac{4+2+6+1+5}{3}=$ цѣлому числу 6, и, сверхъ того, послѣдняя цифра даннаго числа есть 5.

Цѣлое число будетъ дѣлиться на 16, когда его тысячи, вмѣстѣ съ сотнями, десятками и простыми единицами, дѣлятся безъ остатка на 16. Это очевидно изъ того, что *десятки тысячь*, а слѣдовательно и высшіе разряды, дѣлятся на̀-цѣло на 16.

Показанные здѣсь признаки дѣлимости очень полезны для *разложенія числа на простые множители.* Пусть напримѣръ будетъ число 17325. Во первыхъ видимъ, что оно нечётное, ибо послѣдняя его цифра нечётная; слѣдовательно оно не дѣлится на 2. Смотримъ потомъ, не дѣлится ли оно на 3; такъ какъ сумма его цифръ $1+7+3+2+5=18$ дѣлится на 3, то и заключаемъ, что и данное число дѣлимо безъ остатка на 3. Произведя дѣленіе, получимъ $17325=3.5775$. Беремъ опять сумму цифръ числа 5775, и находимъ такимъ образомъ что и 5775 дѣлимо на 3; слѣдовательно $17325=3.3.1925$. Впрочемъ, найдя выше что сумма цифръ предложеннаго числа равна 18, и замѣтивъ что $1+8=9$, могли уже прямо заклю-

чить о дѣлимости 17325 на 9, то есть на произведенiе 3.3. Число 1925 не дѣлится на 3, потому, что сумма $1+9+2+5=17$, а 17 не дѣлимо на 3; но какъ 1925 оканчивается цифрою 5, то оно дѣлится нà-цѣло на 5. Совершивъ дѣленiе на 5, получимъ 1925=5.385; 385 опять дѣлимо на 5, и найдемъ 385=5.77. И такъ, 17325 = 3.3.5.5.77; но 77 очевидно равняется произведенiю 7.11. Слѣдовательно, окончательное разложенiе даннаго числа 17325 на его простые множители будетъ

$$17325 = 3.3.5.5.7.11 = 3^2.5^2.7.11.$$

Вотъ другiе примѣры для упражненiя:

$$1176=2^3.3.7,\quad 14850=2.3^3.5^2.11,\quad 24024=2^3.3.7.11.13.$$

Опредѣленiе общаго наибòльшаго дѣлителя.

§ 72. Въ § 64 мы уже упомянули объ ***общемъ наибòльшемъ дѣлителѣ*** двухъ данныхъ чиселъ. Теперь займемся подробнѣе этимъ предметомъ.

Общимъ наибòльшимъ дѣлителемъ двухъ или нѣсколькихъ чиселъ называется наибòльшее число, раздѣляющее всѣ предложенныя безъ остатка.

Когда данныя числа разложены на простые множители, то ***общiй наибòльшiй ихъ дѣлитель*** опредѣляется очень просто. Напримѣръ, даны два числа 2520 и 588, и положимъ, что предварительно найдены ихъ разложенiя

$$2520 = 2^3.3^2.5.7,\quad 588 = 2^2.3.7^2.$$

Такъ какъ 2 входитъ ***три*** раза множителемъ въ первое число, а только ***два*** раза во второе, то оба числа дѣлимы на $2\times2=2^2$; подобнымъ образомъ увидимъ, что числа 2520 и 588, сверхъ того, при совокупномъ ихъ разсматриванiи, могутъ дѣлиться только на 3 и на 7. Наблюдая же, что числа 2^2, 3 и 7 взаимно-простыя, заключаемъ, по § 69, о дѣлимости 2520 и 588 на произведенiе $2^2.3.7 = 84$, которое и будетъ ***общимъ наибòльшимъ дѣлителемъ*** двухъ предложенныхъ чиселъ 2520 и 588.

Когда числа, для которыхъ ищется общій наибо̀льшій дѣлитель, довольно значительны, то можетъ случиться, что разложеніе ихъ на простые множители поведетъ къ выкладкамъ, слишкомъ продолжительнымъ. Въ такомъ случаѣ употребляемъ слѣдующій способъ, основанный на *послѣдовательномъ дѣленіи*, о которомъ уже говорено въ концѣ § 48.

Бо̀льшее изъ двухъ данныхъ чиселъ раздѣляемъ на мѐньшее, отъ чего получаемъ частное и вообще нѣкоторый остатокъ; потомъ мѐньшее число дѣлимъ на этотъ первый остатокъ; первый остатокъ на второй, второй на третій, и такъ далѣе до тѣхъ поръ, пока не дойдемъ до дѣленія безъ остатка. Послѣдній остатокъ, дѣлящій на̀-цѣло предпослѣдній, будетъ искомый общій наибо̀льшій дѣлитель ***данныхъ двухъ чиселъ.***

Для доказательства этого правила поступаемъ слѣдующимъ образомъ: изъ двухъ данныхъ чиселъ составляемъ *неправильную дробь*, написавъ бо̀льшее изъ нихъ въ числителѣ, а мѐньшее въ знаменателѣ; потомъ, отдѣливъ отъ неправильной дроби цѣлое число, получимъ въ избыткѣ *правильную дробь*. Тогда, на основаніи 2-го Слѣдствія Предложенія 1-го (§ 67), усмотримъ, что *члены правильной дроби будутъ имѣть тотъ же самый общій наибо̀льшій дѣлитель, какъ и члены неправильной.* Дѣйствительно, такъ какъ бо̀льшее число будетъ состоять изъ двухъ слагаемыхъ, именно изъ произведенія частнаго на мѐньшее число и остатка, то этотъ остатокъ долженъ дѣлиться на общій наибо̀льшій дѣлитель данныхъ двухъ чиселъ составляющихъ члены неправильной дроби. Съ другой же стороны, такъ какъ остатокъ изображаетъ числитель правильной дроби, а мѐньшее изъ двухъ данныхъ чиселъ ея знаменатель, то отсюда и слѣдуетъ непосредственно справедливость приведеннаго сей-часъ свойства. Сверхъ того, обратимъ вниманіе на другое, очевидное свойство всякой дроби въ отношеніи къ ея обратной, получаемой чрезъ перемѣну числителя на знаменатель,

и на-оборотъ: *двѣ такія дроби или въ одно время несократимы, или сокращаются на одно и тò же число, которое въ такомъ случаѣ и будетъ* общимъ наибòльшимъ дѣлителемъ *обоихъ членовъ.*

Основываясь на сказанномъ, способъ опредѣленія общаго наибòльшаго дѣлителя не представитъ ни малѣйшаго затрудненія. Въ самомъ дѣлѣ, пусть даны, напримѣръ, два числа 564 и 192; для опредѣленія общаго наибòльшаго ихъ дѣлителя, пишемъ

$$\frac{564}{192} = 2 + \frac{180}{192},$$

и въ силу перваго свойства заключаемъ, что числа 192 и 180 будутъ имѣть тотъ же самый общій наибòльшій дѣлитель, какъ 564 и 192; въ силу же втораго свойства двѣ дроби

$$\frac{180}{192} \text{ и } \frac{192}{180}$$

или не сокращаются, или сокращаются на одно и тò же число. Далѣе, изъ равенства

$$\frac{192}{180} = 1 + \frac{12}{180}$$

слѣдуетъ, что 180 и 12 имѣютъ тотъ же самый общій наибòльшій дѣлитель, какъ 192 и 180, а поэтому также какъ 564 и 192. Подобнымъ образомъ заключаемъ, что двѣ дроби

$$\frac{12}{180} \text{ и } \frac{180}{12}$$

сокращаются на одно и тò же число, и какъ сверхъ того

$$\frac{180}{12} = \text{цѣлому числу } 15,$$

то и оказывается, что 12 есть *общій наибòльшій дѣлитель* двухъ предложенныхъ чиселъ 564 и 192.

Ясно, что еслибъ по изложенному сей-часъ способу дошли до дроби, имѣющей числителемъ единицу, то заключили бы изъ того, что данныя два числа *взаимно-простыя*, то есть, что они никакого общаго дѣлителя не имѣютъ.

Дѣйствіе разъисканія общаго наибольшаго дѣлителя располагается какъ показано въ § 48 для послѣдовательнаго дѣленія. Такъ для предъидущаго примѣра будетъ:

```
            192 | 564 | 2
                  384
                ------
1-й Ост:          180 | 192 | 1
                        180
                      ------
2-й Ост:                 12 | 180 | 15
                              12
                              --
                               60
                               60
                               --
                               0.
```

Если, производя объясненное сей-часъ дѣйствіе надъ двумя числами, дойдемъ до остатка равнаго 1, то это будетъ значить, какъ уже сказано выше, что данныя числа не имѣютъ никакого общаго дѣлителя. Таковы, напримѣръ, числа 35 и 54, для которыхъ получимъ

```
35 | 54 | 1
     35
    ---
     19 | 35 | 1
           19
          ---
           16 | 19 | 1
                16
               ---
                 3 | 16 | 5
                     15
                    ---
                      1 | 3 | 3
                          3
                         --
                          0.
```

Когда требуется найти общій наибольшій дѣлитель между тремя числами, или болѣе, то сперва ищемъ общій наибольшій

дѣлитель двухъ изъ данныхъ чиселъ, выбирая преимущественно ме́ньшія; между этимъ найденнымъ дѣлителемъ и третьимъ изъ данныхъ чиселъ, ищемъ опять общій наибо̀льшій дѣлитель, который и будетъ *искомымъ*, если предложено было только три числа. Когда же дано болѣе трехъ чиселъ, то продолжаемъ объясненное сей-часъ дѣйствіе, и дѣлитель, найденный окончательно, очевидно будетъ ***общимъ наибо̀льшимъ дѣлителемъ*** всѣхъ чиселъ. Напримѣръ, даны три числа: 180, 252 и 378. Находимъ, что общій наибо̀льшій дѣлитель между 180 и 252 есть 36; далѣе, ищемъ общій наибо̀льшій дѣлитель между 36 и 378, и получаемъ число 18. Слѣдовательно 18 и будетъ общимъ наибо̀льшимъ дѣлителемъ трехъ чиселъ 180, 252 и 378.

Предлагаемъ нѣсколько примѣровъ для упражненія:

Данныя числа:	*Общій наибо̀льшій дѣлитель:*
351 и 288	9.
1053 и 247	13.
1005 и 645	15.
1428 и 1036	28.
4352 и 2227	17.
1386, 854 и 700	14.

§ 73. Послѣ сказаннаго объ общемъ наибо̀льшемъ дѣлителѣ, дѣйствіе ***сокращенія дробей*** не представитъ ни малѣйшаго затрудненія. Во всякомъ случаѣ, ***для приведенія дроби къ самому простому виду должно опредѣлить общій наибо̀льшій дѣлитель обоихъ ея членовъ, и потомъ раздѣлить каждый изъ нихъ на этотъ наибо̀льшій дѣлитель.***

Напримѣръ, имѣя дробь $\frac{126}{396}$, и найдя

$$396 = 2^2.3^2.11, \quad 126 = 2.3^2.7,$$

усмотримъ, что произведеніе $2.3^2 = 18$ будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ чиселъ 396 и 126. И такъ, раздѣляя оба члена данной дроби на число 18, получимъ

$$\frac{126}{396} = \frac{126:18}{396:18} = \frac{7}{22};$$

$\frac{7}{22}$ будетъ самый простой видъ дроби $\frac{126}{396}$.

Равнымъ образомъ неправильная дробь $\frac{564}{192}$, по сокращеніи на найденный выше общій наибольшій дѣлитель 12 для двухъ чиселъ 564 и 192, обратится въ слѣдующую:

$$\frac{564:12}{192:12} = \frac{47}{16}.$$

Вотъ другіе примѣры:

$$\frac{60}{84} = \frac{5}{7}, \quad \frac{44}{110} = \frac{2}{5}, \quad \frac{90}{147} = \frac{30}{49}, \quad \frac{153}{495} = \frac{17}{35}.$$

ОТДѢЛЪ V.

Преобразованіе дробей и основныя дѣйствія надъ ними.

Приведеніе дробей къ одному знаменателю.

§ 74. Приведеніе дробей къ одному знаменателю основано на томъ, что величина дроби не перемѣняется, когда умножаемъ оба ея члена на одно и тò же число.

Положимъ напримѣръ, что требуется привести къ одному знаменателю двѣ дроби $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{7}$. Для этого помножаемъ оба члена первой дроби на знаменатель 7 второй, а члены второй дроби на знаменатель 5 первой. Въ силу § 61 получимъ

$$\frac{2}{5} = \frac{2.7}{5.7} = \frac{14}{35} \quad \text{и} \quad \frac{3}{7} = \frac{3.5}{7.5} = \frac{15}{35}.$$

Такимъ образомъ данныя двѣ дроби приведены къ общему знаменателю 35.

Если бы имѣли въ виду узнать, которая изъ предложенныхъ двухъ дробей $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{7}$ больше, то наблюдая, что первая равна $\frac{14}{35}$, а вторая $\frac{15}{35}$, увидѣли бы тотчасъ, что $\frac{3}{7} > \frac{2}{5}$; при чемъ избытокъ бо̀льшей предъ мѐньшей равенъ $\frac{1}{35}$.

Вообще, ***для приведенія скольких угодно дробей къ одному знаменателю, надобно числитель и знаменатель каждой изъ нихъ умножить на произведеніе знаменателей всѣхъ прочихъ дробей.*** При такомъ дѣйствіи величины дробей, какъ сей-часъ замѣчено, не перемѣнятся, а знаменатели новыхъ дробей будутъ всѣ равны между собою, потому что они изобразятъ произведенія однихъ и тѣхъ же множителей.

Примѣръ. Привести къ одному знаменателю три дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{5}$. Получимъ

$$\frac{1}{2} = \frac{1.3.5}{2.3.5} = \frac{15}{30}$$
$$\frac{2}{3} = \frac{2.2.5}{3.2.5} = \frac{20}{30}$$
$$\frac{3}{5} = \frac{3.2.3}{5.2.3} = \frac{18}{30}.$$

Вотъ еще примѣръ для упражненія: привести къ общему знаменателю дроби $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{10}{11}$ и $\frac{17}{19}$; получимъ

$$\frac{3}{5} = \frac{3.14.11.19}{5.14.11.19} = \frac{8778}{14630}$$
$$\frac{5}{14} = \frac{5.5.11.19}{14.5.11.19} = \frac{5225}{14630}$$
$$\frac{10}{11} = \frac{10.5.14.19}{11.5.14.19} = \frac{13300}{14630}$$
$$\frac{17}{19} = \frac{17.5.14.11}{19.5.14.11} = \frac{13090}{14630}.$$

§ 75. Иногда, при вычисленіяхъ съ дробными числами въ соединеніи съ цѣлыми, полезно цѣлому числу давать видъ дроби съ опредѣленнымъ знаменателемъ. Это дѣлается весьма просто: стоитъ только *предложенное цѣлое число помножить*

на данный знаменатель, провести подъ этимъ произведеніемъ черту, и подъ нею подписать знаменатель. Дѣйствительно, поступая такимъ образомъ, мы сперва увеличиваемъ цѣлое число во столько разъ, сколько заключается единицъ въ знаменателѣ, а потомъ полученное произведеніе уменьшаемъ во столько же разъ; отъ этихъ двухъ противоположныхъ дѣйствій, умноженія и дѣленія, цѣлое число не перемѣнится, а получитъ требуемый видъ дроби, которая, очевидно, будетъ, *неправильная.* Такъ приводя цѣлое число 12 къ дроби съ знаменателемъ 7, получимъ $12 = \frac{12.7}{7} = \frac{84}{7}$. Замѣтимъ также, что цѣлое число приводится прямо къ дробному виду, проведя подъ нимъ черту, и подписавъ подъ нею 1; поэтому будетъ $12 = \frac{12}{1}$, $23 = \frac{23}{1}$ и проч.

§ 76. Когда въ числѣ знаменателей предложенныхъ дробей есть такіе, которые имѣютъ общіе дѣлители, то эти дроби могутъ быть приведены къ одному знаменателю, мѐньшему чѣмъ произведеніе всѣхъ данныхъ. Положимъ, напримѣръ, что желаемъ привести къ общему знаменателю три дроби $\frac{3}{8}$, $\frac{11}{18}$ и $\frac{17}{30}$. Вопросъ очевидно состоитъ въ томъ, чтобы по умноженіи обоихъ членовъ каждой дроби на надлежащее число, онѣ имѣли одинъ и тотъ же знаменатель. Ясно, что этотъ общій знаменатель, какъ кратный чиселъ 8-ми, 18-ти и 30-ти, долженъ дѣлиться порознь на 8, на 18 и на 30. И такъ, самый простой изъ общихъ знаменателей изобразится *наимѐньшимъ числомъ*, раздѣляющимся нà-цѣло на 8, на 18 и на 30. Чтобы найти это наимѐньшее число, которое назовемъ *наимѐньшимъ кратнымъ* чиселъ 8, 18 и 30, разложимъ послѣднія на простые множители. Получимъ

$$8 = 2^3, \quad 18 = 2.3^2, \quad 30 = 2.3.5.$$

Такъ, какъ наимѐньшее кратное должно дѣлиться 1) на 8 или на 2^3, то оно непремѣнно должно заключать множителемъ чи-

сло 2^3; 2) наименьшее кратное должно также дѣлиться на 18 или на 2.3^2; но какъ оно уже дѣлимо на 8, а слѣдовательно и на 2, то, для дѣлимости на произведеніе 2.3^2, искомое число должно имѣть множителемъ 3^2; наконецъ 3) наименьшее кратное должно дѣлиться на 30 или на 2.3.5; такъ какъ оно уже дѣлимо на 2 и на 3, ибо заключаетъ въ себѣ множители 2^3 и 3^2, то остается только ввести въ него простой множитель 5. Слѣдовательно, наименьшее кратное для чиселъ 8, 18 и 30 будетъ равно произведенію $2^3.3^2.5=360$. Это число, какъ замѣчено выше будетъ *наименьшимъ общимъ знаменателемъ* дробей

$$\frac{3}{8},\quad \frac{11}{18}\quad \text{и}\quad \frac{17}{30};$$

дѣйствительно, по приведеніи ихъ, получимъ

$$\frac{3.45}{8.45}=\frac{135}{360},\quad \frac{11.20}{18.20}=\frac{220}{360},\quad \frac{17.12}{30.12}=\frac{204}{360}.$$

Еслибъ, въ этомъ самомъ примѣрѣ, искали общій знаменатель по правилу, предложенному въ § 74, то вмѣсто найденнаго числа 360, получили бы болѣе сложное, именно 8.18.30=4320.

Совершенно подобнымъ образомъ поступаемъ для слѣдующихъ четырехъ дробей: $\frac{7}{9}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{55}{84}$ и $\frac{143}{336}$. Найдя разложенія: $9=3^2$, $14=2.7$, $84=2^2.3.7$ и $336=2^4.3.7$, получимъ для общаго наименьшаго знаменателя данныхъ дробей число $2^4.3^2.7=1008$.

Сообразивъ съ нѣкоторымъ вниманіемъ объясненное сей-часъ примѣрами, увидимъ, что когда знаменатели данныхъ дробей не всѣ взаимно-простые, то для опредѣленія *наименьшаго общаго ихъ знаменателя*, должно поступать слѣдующимъ образомъ: *знаменатели данныхъ дробей разложить на простые ихъ множители; потомъ написать каждый простой множитель столько разъ, сколько онъ входитъ въ тотъ изъ знаме-*

нателей, гдѣ повторяется чаще. Произведеніе всѣхъ написанныхъ такимъ образомъ простыхъ множителей, изобразитъ искомый наимѐньшій знаменатель, *общій всѣмъ даннымъ дробямъ.*

Наимѐньшее кратное для сколькихъ угодно чиселъ можно также найти не разлагая ихъ предварительно на простые множители. Пусть, напримѣръ, даны три числа 360, 198 и 105. Наимѐньшее кратное первыхъ двухъ 360 и 198 опредѣлится, когда, сыскавъ общій ихъ наибо̀льшій дѣлитель 18, раздѣлимъ на него одно изъ двухъ чиселъ, положимъ 198, и потомъ умножимъ другое, 360, на полученное частное $\frac{198}{18} = 11$. Такимъ образомъ найдется, что наимѐньшее кратное для чиселъ 360 и 198 равно $360 \times 11 = 3960$. Причина этого правила очевидна: и въ самомъ дѣлѣ, по раздѣленіи 198 на общій наибо̀льшій дѣлитель 18 двухъ чиселъ 360 и 198, частное 11 не будетъ уже имѣть никакихъ общихъ дѣлителей съ $360 = 20 \times 18$, а поэтому и съ 20. Теперь, умноживъ на 11 произведеніе $20 \times 18 = 360$, получится число $20 \times 18 \times 11$, которое не заключаетъ въ себѣ ни одного множителя лишняго для дѣлимости, въ одно время, на $360 = 20 \times 18$ и на $198 = 18 \times 11$, ибо 20 и 11, какъ замѣчено выше, суть числа взаимно-простыя. Слѣдовательно $20 \times 18 \times 11 = 3960$ будетъ наимѐньшимъ числомъ, раздѣляющимся на̀-цѣло на 360 и на 198. Чтобы ввести третье число 105, ищемъ наимѐньшее кратное для 3960 и 105. Такъ какъ общій ихъ наибо̀льшій дѣлитель есть 15, то раздѣливъ 105 на 15, и умноживъ потомъ 3960 на частное $\frac{105}{15} = 7$, получимъ для искомаго наимѐньшаго кратнаго трехъ чиселъ 360, 198 и 105 слѣдующее произведеніе: $3960 \times 7 = 27720$.

§ 77. Во всѣхъ приведенныхъ здѣсь примѣрахъ, дроби предлагались въ самомъ простомъ ихъ видѣ, то есть, были *несократимы*. Но если случится, что нѣкоторыя изъ данныхъ

дробей могутъ быть приведены къ простѣйшему виду, то вообще надобно сперва сократить ихъ, и потомъ уже приводить къ одному знаменателю. Впрочемъ, когда числители и знаменатели разложены на простые множители, то лучше разсмотрѣть предварительно, не выгоднѣе ли оставить дробь безъ сокращенія на нѣкоторые общіе дѣлители. Напримѣръ, въ первой изъ двухъ дробей

$$\frac{15}{20}=\frac{3.5}{2.2.5},\quad \frac{7}{15}=\frac{7}{3.5},$$

нѣтъ надобности сокращать числитель и знаменатель на 5, потому что для приведенія этихъ двухъ дробей къ одному знаменателю, пришлось бы опять помножить оба члена первой на то̀ же число 5, отъ чего произошли бы два лишнія дѣйствія, именно: сокращеніе на 5 и умноженіе на то̀ же число 5.

§ 78. Дроби очень легко приводятся и къ *одному числителю*. Стоитъ только числитель и знаменатель каждой изъ данныхъ дробей помножить на числители всѣхъ остальныхъ дробей. Такъ, напримѣръ, приведя три дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{5}$ къ одному числителю, получимъ

$$\frac{1}{2}=\frac{1.2.3}{2.2.3}=\frac{6}{12}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{2.1.3}{3.1.3}=\frac{6}{9}$$

$$\frac{3}{5}=\frac{3.1.2}{5.1.2}=\frac{6}{10}.$$

Въ этомъ видѣ легко сравнить между собою три предложенныя дроби; дѣйствительно, на основаніи § 58, заключаемъ непосредственно, что $\frac{2}{3}>\frac{3}{5}$, $\frac{3}{5}>\frac{1}{2}$.

Впрочемъ, разсмотрѣнное сей-часъ дѣйствіе не имѣетъ такого частаго приложенія, какъ приведеніе дробей къ одному знаменателю.

Приступаемъ теперь къ основнымъ четыремъ дѣйствіямъ надъ дробями.

Сложеніе и вычитаніе дробей.

§ 79. Сложеніе и вычитаніе дробей производятся весьма просто: *когда данныя дроби имѣютъ одинакіе знаменатели, то для сложенія сихъ дробей, складываютъ ихъ числители, и подъ суммою подписываютъ ихъ знаменатель, а для вычитанія, берутъ разность числителей, подъ которою также подписываютъ общій объимъ дробямъ знаменатель.*

Поэтому, сумма трехъ дробей $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$ равна $\frac{1+2+3}{7}=\frac{6}{7}$, а разность, напримѣръ между двумя крайними, именно $\frac{3}{7}-\frac{1}{7}$, будетъ $\frac{3-1}{7}=\frac{2}{7}$. Справедливость этого правила очевидна: дѣйствительно, такъ какъ при одинакихъ знаменателяхъ всѣ дроби состоятъ изъ равныхъ частей единицы, то искомая сумма и будетъ равна полному числу данныхъ частей, которое изобразится суммою числителей. Такъ въ предъидущемъ примѣрѣ всѣ дроби состояли изъ извѣстнаго числа частей, равныхъ *одной седьмой* доли цѣлой единицы; $\frac{1}{7}$ и $\frac{2}{7}$ составятъ $\frac{3}{7}$ и еще $\frac{3}{7}$, всего $\frac{6}{7}$. Подобнымъ образомъ, отнимая $\frac{1}{7}$ отъ $\frac{3}{7}$, останется очевидно $\frac{2}{7}$.

Для сложенія и вычитанія дробей съ различными знаменателями, стоитъ только предварительно привести эти дроби къ одному знаменателю, и потомъ уже поступать съ ними сообразно съ показанными сей-часъ правилами.

Примѣръ сложенія. Сложить дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ и $\frac{5}{6}$. Приведя эти пять дробей къ наимѐньшему общему знаменателю 60, получимъ:

$$\frac{1}{2}=\frac{30}{60},\quad \frac{2}{3}=\frac{40}{60},\quad \frac{3}{4}=\frac{45}{60},\quad \frac{4}{5}=\frac{48}{60},\quad \frac{5}{6}=\frac{50}{60};$$

слѣдовательно

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}=\frac{30}{60}+\frac{40}{60}+\frac{45}{60}+\frac{48}{60}+\frac{50}{60}$$

$$=\frac{30+40+45+48+50}{60}=\frac{213}{60}.$$

Дробь $\frac{213}{60}$, по сокращеніи на 3, приводится къ $\frac{71}{20}$. И такъ, искомая сумма равняется неправильной дроби $\frac{71}{20}$, или, по отдѣленіи цѣлаго числа, $3+\frac{11}{20}$.

Примѣръ вычитанія. Изъ $\frac{25}{63}$ вычесть $\frac{17}{66}$. Такъ какъ...... $63=3.3.7$, а $66=2.3.11$, то наимѐньшее кратное чиселъ 63 и 66, или наимѐньшій общій знаменатель данныхъ двухъ дробей будетъ $2.3.3.7.11=1386$. Поэтому получимъ

$$\frac{25}{63}=\frac{25.2.11}{63.2.11}=\frac{550}{1386}$$

$$\frac{17}{66}=\frac{17.3.7}{66.3.7}=\frac{357}{1386},$$

и слѣдовательно

$$\frac{25}{63}-\frac{17}{66}=\frac{550}{1386}-\frac{357}{1386}=\frac{550-357}{1386}=\frac{193}{1386}.$$

§ 80. Когда при дробяхъ, данныхъ для сложенія или вычитанія, будутъ находиться цѣлыя числа, то надъ цѣлыми числами производимъ выкладки отдѣльно, а съ дробными поступаемъ какъ сей-часъ было показано. По окончаніи же дѣйствія, можемъ, если пожелаемъ, привести цѣлое число съ дробью къ неправильной дроби, или, получивъ неправильную дробь, отдѣлить отъ нея цѣлое число. Такъ, напримѣръ, означая сложеніе смѣшанныхъ чиселъ 43, $12\frac{1}{3}$, $33\frac{7}{15}$ и $8\frac{19}{30}$, получимъ:

$$43+12+\frac{1}{3}+33+\frac{7}{15}+8+\frac{19}{30};$$

сложивъ отдѣльно цѣлыя числа, имѣемъ

$$43+12+33+8=96;$$

для сложенія дробей, приводимъ ихъ сперва къ общему наимѐньшему знаменателю 30, и находимъ

$$\frac{1}{3}=\frac{10}{30},\quad \frac{7}{15}=\frac{14}{30},\quad \frac{19}{30};$$

слѣдовательно

$$\frac{1}{3}+\frac{7}{15}+\frac{19}{30}=\frac{10}{30}+\frac{14}{30}+\frac{19}{30}=\frac{43}{30}.$$

И такъ, сумма предложенныхъ цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ равна $96+\frac{43}{30}$. Если отъ $\frac{43}{30}$ отдѣлимъ цѣлое число, то получимъ

$\frac{43}{30}=1\frac{13}{30}$, и окончательный результатъ сложенія будетъ

$$96+1\frac{13}{30}=97\frac{13}{30} \text{ или } \frac{97.30+13}{30}=\frac{2923}{30}.$$

Подобнымъ образомъ производится и вычитаніе смѣшанныхъ чиселъ. Положимъ, требуется изъ $85\frac{17}{24}$ вычесть $73\frac{49}{100}$; пишемъ $85\frac{17}{24}-73\frac{49}{100}$; вычитаемъ сперва 73 изъ 85, и получаемъ 12; потомъ, по приведеніи дробей $\frac{17}{24}$ и $\frac{49}{100}$ къ общему знаменателю 600, находимъ

$$\frac{17}{24}=\frac{17.25}{24.25}=\frac{425}{600}, \quad \frac{49}{100}=\frac{49.6}{100.6}=\frac{294}{600},$$

и слѣдовательно

$$\frac{17}{24}-\frac{49}{100}=\frac{425}{600}-\frac{294}{600}=\frac{425-294}{600}=\frac{131}{600}.$$

И такъ, разность $85\frac{17}{24}-73\frac{49}{100}=12\frac{131}{600}$. Числу $12\frac{131}{600}$ можно дать, если пожелаемъ, видъ неправильной дроби, и тогда получимъ

$$12\frac{131}{600}=\frac{12.600+131}{600}=\frac{7331}{600}.$$

Если случится, что вычитаемъ правильную дробь изъ цѣлаго числа, то надобно занять отъ цѣлаго числа одну единицу, и эту единицу обратить въ дробь съ такимъ же знаменателемъ, какъ и у вычитаемой (§ 75). Поэтому, чтобы изъ 10 вычесть $\frac{8}{27}$, занимаемъ отъ 10 одну единицу, которую обращаемъ въ *двадцать седьмыя*, и слѣдовательно пишемъ въ видѣ $\frac{27}{27}$; тогда получимъ

$$10-\frac{8}{27}=9+\frac{27}{27}-\frac{8}{27}=9+\frac{27-8}{27}=9+\frac{19}{27}=\frac{262}{27}.$$

Пусть еще требуется вычесть цѣлое число съ дробью изъ цѣлаго же съ дробью, когда вычитаемая дробь болѣе уменьшаемой. Предположивъ что обѣ дроби имѣютъ уже видъ правильныхъ, мы приводимъ ихъ сперва къ одному знаменателю; потомъ, отъ уменьшаемаго цѣлаго числа занимаемъ единицу, которую обращаемъ въ дробь съ знаменателемъ, одинакимъ

съ общимъ знаменателемъ двухъ данныхъ дробей. Тогда вычитаемую дробь отнимаемъ отъ дроби, происшедшей отъ занятой единицы, и къ разности придаемъ уменьшаемую дробь. Съ цѣлыми числами поступаемъ обыкновеннымъ образомъ, и получаемъ окончательный результатъ вычитанія.

Примѣръ. Изъ $27\frac{723}{135}$ вычесть $15\frac{493}{63}$. Приведя данныя двѣ дроби къ виду правильныхъ, получимъ

$$\frac{723}{135}=5\frac{48}{135},\quad \frac{493}{63}=7\frac{52}{63};$$

слѣдовательно уменьшаемое число будетъ

$$27\frac{723}{135}=27+5\frac{48}{135}=32\frac{48}{135},$$

а вычитаемое

$$15\frac{493}{63}=15+7\frac{52}{63}=22\frac{52}{63}.$$

Такъ какъ $135=3.3.3.5$, а $63=3.3.7$, то общій наимѐньшій знаменатель двухъ дробей $\frac{48}{135}$ и $\frac{52}{63}$ будетъ $3.3.3.5.7=945$. Поэтому

$$\frac{48}{135}=\frac{48.7}{135.7}=\frac{336}{945},\quad \frac{52}{63}=\frac{52.3.5}{63.3.5}=\frac{780}{945}.$$

Изъ этого видимъ, что вычитаемая дробь $\frac{780}{945}$ болѣе уменьшаемой $\frac{336}{945}$; и такъ, должно занять единицу, то есть дробь $\frac{945}{945}$ отъ цѣлаго уменьшаемаго числа 32. Послѣ этого найдется, что искомая разность будетъ

$$31+\frac{945}{945}+\frac{336}{945}-22-\frac{780}{945};$$

но

$$31-22=9$$

$$\frac{945}{945}-\frac{780}{945}=\frac{945-780}{945}=\frac{165}{945}$$

$$\frac{165}{945}+\frac{336}{945}=\frac{165+336}{945}=\frac{501}{945};$$

слѣдовательно, окончательный результатъ вычитанія будетъ $9\frac{501}{945}$ или $9\frac{167}{315}$, замѣтивъ, что оба члена дроби $\frac{501}{945}$ дѣлятся на 3.

Примѣры для сложенія и вычитанія дробей:

$$3\frac{1}{3}+5\frac{2}{5}+\frac{7}{10}=9\frac{13}{30}$$

$$1+2\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}+4\frac{3}{4}+5\frac{4}{5}=17\frac{43}{60}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=1\frac{83}{140}$$

$$8-3\frac{53}{185}=4\frac{132}{185}$$

$$7\frac{35}{86}-\frac{1}{2}=6\frac{39}{43}$$

$$26\frac{6}{49}-14\frac{23}{35}=11\frac{114}{245}.$$

Умноженіе дробей.

§ 81. Мы уже видѣли въ § 60, что умножая числитель какой ни есть дроби, или раздѣляя ея знаменатель на цѣлое число, дробь увеличится во столько разъ, сколько въ данномъ числѣ заключается единицъ. Слѣдовательно, *для умноженія дроби на цѣлое число, стоитъ только помножить числитель на данное число, и подъ произведеніемъ подписать знаменатель. Или, если знаменатель дѣлится безъ остатка на данное число, то проще будетъ оставить числитель какъ онъ есть, а подъ нимъ подписать частное, происшедшее отъ раздѣленія знаменателя на цѣлое число.*

Такъ, напримѣръ, чтобъ умножить дробь $\frac{6}{35}$ на 4, умножаемъ 6 на 4, и подъ произведеніемъ 24 подписываемъ знаменатель 35. Слѣдовательно будетъ $\frac{6}{35}\cdot 4=\frac{24}{35}$. Если бы ту же дробь $\frac{6}{35}$ требовалось помножить на 5, то поступая какъ сей–часъ сказано, нашли бы $\frac{6}{35}\cdot 5=\frac{30}{35}$. Но, замѣтивъ, что знаменатель 35 дѣлится нà–цѣло на 5, мы можемъ оставить числитель 6 какъ онъ есть, подписавъ подъ нимъ частное 7, происшедшее отъ раздѣленія 35 на 5; тогда получимъ результатъ умноженія въ самомъ простомъ видѣ, именно

$\frac{6}{35}\cdot 5 = \frac{6}{35:5} = \frac{6}{7}$. Ясно, что дробь $\frac{30}{35}$, по сокращеніи обоихъ ея членовъ на 5, обратится также въ $\frac{6}{7}$.

§ 82. Иногда случается, что имѣемъ надобность найти дробную часть дроби. Такъ, напримѣръ, если бы требовалось опредѣлить *осьмую часть одной четверти* аршина, то для этого раздѣлили бы мысленно $\frac{1}{4}$ аршина на 8 частей, и нашли бы (§ 60) $\frac{1}{4.8}$ или $\frac{1}{32}$ долю аршина, то есть *одну половину* вершка. Съ отвлеченными дробями надлежало бы поступать точно такъ же. Поэтому, для опредѣленія *осьмой части* дроби $\frac{3}{7}$, стоитъ только уменьшить предложенную дробь въ *восемь* разъ, то есть помножить ея знаменатель 7 на 8 (§ 60); такимъ образомъ получимъ $\frac{3}{7.8} = \frac{3}{56}$. *Двѣ осьмыя* той же дроби $\frac{3}{7}$ очевидно найдутся взявъ сумму $\frac{3}{7.8} + \frac{3}{7.8}$, или, что̀ всё равно, помноживъ дробь $\frac{3}{56}$ на 2, почему и будетъ $\frac{3}{56}.2 = \frac{3.2}{7.8} = \frac{3}{28}$, и такъ далѣе. Еслибъ искали, положимъ, $\frac{5}{8}$ дроби $\frac{3}{7}$, то сперва опредѣлили бы $\frac{1}{8}$ долю $\frac{3}{7}$, равную $\frac{3}{7.8}$; потомъ, какъ требуется взять 5 такихъ долей, то и нашли бы окончательно

$$\frac{3}{7.8} + \frac{3}{7.8} + \frac{3}{7.8} + \frac{3}{7.8} + \frac{3}{7.8} = \frac{3.5}{7.8}.$$

Слѣдовательно, *чтобы получить дробную часть дроби, надобно составить новую дробь, у которой числитель равенъ произведенію числителей двухъ данныхъ дробей, а знаменатель, произведенію ихъ знаменателей:*

Примѣры: Найти *три двадцать пятыя* дроби $\frac{15}{36}$; получимъ

$$\frac{15.3}{36.25} = \frac{1}{20}.$$

Найти *семь девятнадцатыхъ* дроби $\frac{23}{42}$; получимъ

$$\frac{23.7}{42.19} = \frac{23.7}{6.7.19} = \frac{23}{114}.$$

Найти *одинадцать сотыхъ* дроби $\frac{189}{254}$; найдется

$$\frac{189.11}{254.100} = \frac{2979}{25400};$$

послѣдняя дробь не сокращается.

Слѣдствіе, получаемое при опредѣленіи дробной части дроби, называется иногда *дробью дроби*, а самое дѣйствіе, то есть перемноженіе числителей и знаменателей между собою, *умноженіемъ дроби на дробь*. И такъ, если бы сказано было, что нужно умножить дробь $\frac{3}{8}$ на $\frac{5}{7}$, то это значило бы, что требуется взять *пять седьмыхъ дроби* $\frac{3}{8}$, или, что̀ очевидно всё равно, *три осьмыя* дроби $\frac{5}{7}$; результатъ этого дѣйствія будетъ $\frac{3.5}{8.7}$ или $\frac{5.3}{7.8}$, то есть $\frac{15}{56}$. Дѣйствіе умноженія дроби на дробь означается, какъ и для цѣлыхъ чиселъ, крестомъ или чаще *точкою*, поставленною между данными двумя дробями; поэтому

$$\frac{3}{8}\times\frac{5}{7} \quad \text{или} \quad \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7} = \frac{3.5}{8.7} = \frac{15}{56}.$$

Сказанное здѣсь объ умноженіи дроби на дробь равно относится и къ умноженію цѣлаго числа на дробь. И такъ, умножить 6 на $\frac{5}{7}$ значитъ найти *пять седьмыхъ отъ шести*, то есть раздѣлить 6 на 7 частей, и взять 5 такихъ частей. Результатъ этихъ двухъ дѣйствій очевидно одинаковъ съ результатомъ умноженія дроби $\frac{5}{7}$ на цѣлое число 6, и будетъ $\frac{5.6}{7}=\frac{30}{7}=4\frac{2}{7}$.

Замѣтимъ что умноженіе, вообще означающее повтореніе цѣлаго числа или опредѣленной части единицы, не имѣетъ уже этого значенія при умноженіи дроби на дробь. Въ обыкновенномъ значеніи, число цѣлое или дробное *увеличивается* чрезъ умноженіе, а здѣсь, напротивъ того, произведеніе двухъ дробей *уменьшается*, когда онѣ обѣ правильныя. Умноженіе дроби на дробь, будутъ ли онѣ правильныя или неправильныя, собственно говоря есть *дѣйствіе смѣшанное*, состоящее

изъ обыкновеннаго *умноженія* и *дѣленія* на цѣлыя числа. Такъ, напримѣръ, для умноженія дроби $\frac{3}{8}$ на $\frac{5}{7}$, мы сперва должны взять *седьмую долю* $\frac{3}{8}$, то есть *раздѣлить* эту дробь на 7, а потомъ найденную долю $\frac{3}{8.7}=\frac{3}{56}$ повторить *пять* разъ, то есть *умножить* на 5.

§ 83. *Когда при дробяхъ, данныхъ для умноженія, находятся цѣлыя числа, то приводимъ къ дробному виду* (§ 56) *оба множителя, и потомъ поступаемъ съ новыми дробями по извѣстному уже намъ правилу.*

Такъ для умноженія $2\frac{3}{5}$ на 8, приводимъ $2\frac{3}{5}$ къ виду $\frac{2.5+3}{5}=\frac{13}{5}$, и потомъ, умноживъ числитель 13 на 8, получаемъ окончательное слѣдствіе

$$\frac{13}{5}\cdot 8=\frac{13.8}{5}=\frac{104}{5}=20\frac{4}{5}.$$

Вотъ еще два примѣра:

Умножить $6\frac{3}{8}$ на $13\frac{6}{11}$; имѣемъ

$$6\frac{3}{8}=\frac{51}{8}, \qquad 13\frac{6}{11}=\frac{149}{11};$$

слѣдовательно, искомое произведеніе будетъ

$$\frac{51}{8}\cdot\frac{149}{11}=\frac{51.149}{8.11}=\frac{7599}{88}=86\frac{31}{88}.$$

Умножить цѣлое число 18 на $7\frac{8}{15}$; такъ какъ $7\frac{8}{15}=\frac{113}{15}$, то и получимъ

$$18\cdot\frac{113}{15}=\frac{113.18}{15}=\frac{2034}{15}=135\frac{9}{15}=135\frac{3}{5}.$$

Это самое слѣдствіе можно было получить проще, наблюдая, что цѣлое число 18=3.6 имѣетъ съ знаменателемъ 15 общій дѣлитель 3; тогда бы прямо нашли

$$18\cdot\frac{113}{15}=\frac{113.3.6}{3.5}=\frac{113.6}{5}=\frac{678}{5}=135\frac{3}{5}.$$

Дѣленіе дробей.

§ 84. Въ § 60 показано, что умноживъ знаменатель какой ни есть дроби, или раздѣливъ ея числитель на цѣлое число, дробь уменьшится во столько разъ, сколько въ данномъ числѣ заключается единицъ. Слѣдовательно, *для раздѣленія дроби на цѣлое число, стоитъ только умножить знаменатель дѣлимой дроби на данное цѣлое число; или, если числитель дроби дѣлится нà-цѣло на это число, то проще будетъ раздѣлить числитель на него, и подъ частнымъ подписать прежній знаменатель.*

Такъ для раздѣленія дроби $\frac{27}{50}$ на 3, мы можемъ, или помножить знаменатель 50 на 3, и тогда получимъ дробь $\frac{27}{150}$, которая по сокращеніи приведется къ $\frac{9}{50}$, или, замѣтивъ что 27 дѣлимо на 3, написать въ числителѣ частное $\frac{27}{3} = 9$, и тогда прямо найдемъ сокращенную дробь $\frac{9}{50}$. Если бы эту самую дробь $\frac{27}{50}$ предложено было раздѣлить на 4, то замѣтивъ что дѣленіе 27 на 4 не производится нà-цѣло, надлежало бы умножить на 4 знаменатель 50 предложенной дроби, и получили бы несократимую дробь $\frac{27}{200}$.

Если цѣлое число, на которое дѣлимъ дробь, имѣетъ какой нибудь общій дѣлитель съ ея числителемъ, то результатъ дѣленія сокращается. Напримѣръ, еслибъ требовалось раздѣлить $\frac{35}{101}$ на 21, то замѣтивъ что 35 и 21 имѣютъ общій дѣлитель 7, получили бы

$$\frac{35}{101.21} = \frac{5.7}{101.3.7} = \frac{5}{303}.$$

§ 85. Иногда случается, что имѣемъ надобность найти, сколько разъ одна дробь заключается въ другой; напримѣръ, если бы, принявъ *фунтъ* за единицу, желали узнать, сколько разъ *одинъ золотникъ* содержится въ *одномъ лотѣ*; въ этомъ случаѣ одинъ золотникъ изобразился бы дробью $\frac{1}{96}$ фунта, а одинъ лотъ, $\frac{1}{32}$ частію фунта. Слѣдовательно, надлежало бы сыскать, сколько

разъ mèньшая дробь $\frac{1}{96}$ заключается въ бòльшей дроби $\frac{1}{32}$. Нѣтъ сомнѣнія, что этотъ вопросъ прямо относится къ дѣленію, ибо мы ищемъ, сколько разъ mèньшее число содержится въ другомъ бòльшемъ (§ 40). Легко видѣть, что въ настоящей задачѣ, искомое число разъ равно *тремъ*; и въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$\frac{1}{96}+\frac{1}{96}+\frac{1}{96}=\frac{3}{96}=\frac{3}{32.3}=\frac{1}{32}.$$

И такъ, результатъ дѣленія дроби $\frac{1}{32}$ на $\frac{1}{96}$, будетъ 3.

Въ приведенномъ сей-часъ примѣрѣ дробь $\frac{1}{96}$ содержалась ровное число разъ въ $\frac{1}{32}$, и именно *три* раза. Но часто случается, какъ и при дѣленіи цѣлыхъ чиселъ, что дробь не содержится въ другой ровное число разъ; она можетъ заключаться въ ней или цѣлое число разъ съ дробью, или даже только дробно. Когда имѣемъ цѣлыя числа, напримѣръ дѣлимое 13 и дѣлитель 5, то опредѣляемъ сколько разъ этотъ дѣлитель 5 содержится въ дѣлимомъ 13 раздѣливъ 13 на 5; произведя дѣленіе найдемъ $\frac{13}{5}=2\frac{3}{5}$, то есть что 5 содержится въ 13-ти *два раза съ дробью* $\frac{3}{5}$; если же примемъ 5 за дѣлимое, а 13 за дѣлитель, то увидимъ, что число 13 въ 5 не содержится цѣлое число разъ, ибо второе менѣе перваго; въ такомъ случаѣ говоримъ, что 13 содержится въ 5 *дробно*, и это *дробное содержаніе*, или результатъ дѣленія 5 на 13, означается дробью $\frac{5}{13}$.

Подобнымъ образомъ поступаемъ и съ дробями. Когда данныя двѣ дроби имѣютъ одинакіе знаменатели, то первая изъ нихъ будетъ содержаться во второй столько разъ, сколько числитель первой заключается въ числителѣ второй. Напримѣръ, еслибъ искали, сколько разъ дробь $\frac{5}{16}$ содержится въ $\frac{13}{16}$, то раздѣливъ 13 на 5, получили бы частное $\frac{13}{5}=2\frac{3}{5}$, и это значило бы, что дробь $\frac{5}{16}$ содержится въ $\frac{13}{16}$ *два* раза съ остат-

комъ, составляющимъ *три пятыя* отъ этой самой дроби $\frac{5}{16}$; дѣйствительно, найдется

$$2\cdot\frac{5}{16}+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{16}=\frac{10}{16}+\frac{3}{16}=\frac{13}{16}.$$

Легко понять причину этого правила: въ самомъ дѣлѣ, дробь $\frac{5}{16}$ будетъ содержаться въ дроби $\frac{13}{16}$ одинаковымъ образомъ, какъ цѣлое число 5 въ цѣломъ же числѣ 13, потому что $\frac{5}{16}$ изображаетъ повтореніе 5-ти частей,—въ настоящемъ случаѣ *шестнадцатыхъ долей единицы*,— а $\frac{13}{16}$, повтореніе 13-ти точно такихъ же частей. Ясно, что какія бы не были эти части, равныя между собой, мѣра содержанія не перемѣнится. Итакъ, $\frac{5}{100}$ будетъ содержаться въ $\frac{13}{100}$ точно такъ же, то есть 2 раза съ дробью $\frac{3}{5}$, какъ и $\frac{5}{16}$ въ $\frac{13}{16}$. Чтобы придать этому утвержденію еще болѣе очевидности, положимъ, напримѣръ, что разсматривая дроби $\frac{5}{16}$ и $\frac{13}{16}$, мы принимаемъ *аршинъ* за единицу; тогда *одна шестнадцатая* изобразитъ *одинъ вершокъ*, и, въ свою очередь, можетъ быть принимаема за единицу нисшаго разряда. Вопросъ будетъ состоять въ томъ, чтобъ опредѣлить сколько разъ *пять* вершковъ содержатся въ *тринадцати* вершкахъ. Искомое содержаніе будетъ, само собой разумѣется, число отвлеченное. Если теперь разсмотримъ дроби $\frac{5}{100}$ и $\frac{13}{100}$, принимая *рубль* за единицу, то *одна сотая* изобразитъ *одну копѣйку*, и вопросъ приведется къ опредѣленію отвлеченнаго числа, изображающаго сколько разъ *пять* копѣекъ содержатся въ *тринадцати* копѣйкахъ; такъ какъ данныя здѣсь однѣ и тѣ же что̀ и въ первомъ вопросѣ, именно 5 и 13, то ясно, что окончательный результатъ, или искомое содержаніе, будетъ также одно и то̀ же, то есть $\frac{13}{5}$.

Когда данныя двѣ дроби имѣютъ различные знаменатели, и требуется опредѣлить, сколько разъ одна заключается въ другой, то сперва приводимъ эти дроби къ одному знаменателю, и потомъ поступаемъ съ ними по объясненному сей-часъ правилу.

Дѣйствіе, посредствомъ котораго опредѣляемъ число цѣлое, или дробное, означающее сколько разъ одна дробь заключается въ другой, называется *дѣленіемъ дроби на дробь*. Положимъ, напримѣръ, желаемъ раздѣлить $\frac{7}{15}$ на $\frac{8}{29}$; дѣлимое будетъ $\frac{7}{15}$, а дѣлитель $\frac{8}{29}$. Приведя эти двѣ дроби къ одному знаменателю, получимъ

$$\frac{7}{15}=\frac{7.29}{15.29}=\frac{203}{435},\qquad \frac{8}{29}=\frac{8.15}{29.15}=\frac{120}{435}.$$

И такъ, надобно опредѣлить, сколько разъ дробь $\frac{120}{435}$ заключается въ $\frac{203}{435}$, а для этого, какъ сей-часъ было показано, надобно раздѣлить числитель 203 первой дроби на числитель 120 второй; поэтому, результатъ дѣленія $\frac{7}{15}$ на $\frac{8}{29}$, будетъ $\frac{203}{120}$ или $\frac{7.29}{15.8}$, ибо $203 = 7.29$, а $120 = 15.8$. Если напишемъ найденный результатъ $\frac{7.29}{15.8}$ въ видѣ $\frac{7}{15}\cdot\frac{29}{8}$, и замѣтимъ, что дробь $\frac{29}{8}$ произошла отъ обращенія дроби дѣлителя, то выведемъ слѣдующее заключеніе: *для раздѣленія дроби на дробь, надобно дѣлимую дробь помножить на обращенную дробь дѣлителя.*

Дѣленіе дробей, какъ и ихъ умноженіе, есть вообще *дѣйствіе смѣшанное*, состоящее изъ обыкновеннаго умноженія и дѣленія. Такъ для раздѣленія дроби $\frac{7}{15}$ на $\frac{8}{29}$, мы должны были *умножить* дробь $\frac{7}{15}$ на 29, и потомъ произведеніе $\frac{7.29}{15}$ раздѣлить на 8.

Вотъ еще примѣры: раздѣлить $\frac{30}{77}$ на $\frac{6}{11}$. Найдется

$$\frac{30}{77}:\frac{6}{11}=\frac{30}{77}\cdot\frac{11}{6}=\frac{30.11}{77.6}=\frac{5.6.11}{7.11.6}=\frac{5}{7}.$$

Раздѣлить дробь $\frac{207}{275}$ на $\frac{189}{245}$; получимъ

$$\frac{207}{275}:\frac{189}{245}=\frac{207.245}{275.189}=\frac{23.3.3.7.7.5}{5.5.11.3.3.3.7}=\frac{23.7}{5.11.3}=\frac{161}{165}.$$

Правило для раздѣленія дроби на дробь относится и къ тому случаю, когда требуется раздѣлить цѣлое число на дробь. На-

примѣръ, если бы желали раздѣлить цѣлое число 8 на $\frac{5}{7}$, то обративъ дѣлитель $\frac{5}{7}$, получили бы $\frac{7}{5}$, и умноживъ на эту новую дробь дѣлимое 8, нашли бы $\frac{8.7}{5}=\frac{56}{5}=11\frac{1}{5}$. Это значитъ, что дробь $\frac{5}{7}$ содержится въ цѣломъ числѣ 8 *одинадцать* разъ съ остаткомъ, составляющимъ *одну пятую* отъ этой самой дроби $\frac{5}{7}$; и дѣйствительно будетъ

$$11.\frac{5}{7}+\frac{1}{5}.\frac{5}{7}=\frac{55}{7}+\frac{1}{7}=\frac{56}{7}=8.$$

§ 86. ***Когда при дробяхъ, данныхъ для дѣленія, будутъ находиться цѣлыя числа, то приводимъ сперва дѣлимое и дѣлитель къ дробному виду*** (§ 56), ***и потомъ уже поступаемъ съ новыми дробями по правиламъ, показаннымъ выше.***

Вотъ нѣкоторые примѣры, относящіеся къ этому случаю:

Раздѣлить $6\frac{3}{8}$ на 9. Найдется

$$6\frac{3}{8}=\frac{6.8+3}{8}=\frac{51}{8},$$

и слѣдовательно

$$\frac{51}{8}:9=\frac{51}{8.9}=\frac{3.17}{8.3.3}=\frac{17}{24}.$$

Раздѣлить $9\frac{15}{17}$ на $3\frac{3}{8}$. Такъ какъ

$$9\frac{15}{17}=\frac{168}{17},\qquad 3\frac{3}{8}=\frac{27}{8},$$

то искомый результатъ дѣленія будетъ:

$$\frac{168}{17}:\frac{27}{8}=\frac{168.8}{17.27}=\frac{56.8}{17.9}=\frac{448}{153}=2\frac{142}{153}.$$

Раздѣлить цѣлое число 10 на $2\frac{2}{5}$. Такъ какъ $2\frac{2}{5}=\frac{12}{5}$, то и получимъ

$$10:\frac{12}{5}=\frac{10.5}{12}=\frac{25}{6}=4\frac{1}{6}.$$

Для упражненія предлагаемъ еще нѣсколько примѣровъ смѣшанныхъ дѣйствій надъ дробями:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\times\left(2+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)=\frac{7}{12}.\frac{72}{35}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}.$$

$$\left(2+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right):\left(8-3\frac{2}{5}\right)=\frac{158}{77}:\frac{23}{5}=\frac{158.5}{77.23}=\frac{790}{1771}.$$

$$\frac{8\frac{2}{7}-3\frac{4}{25}}{7+\frac{5}{6}:\frac{7}{10}-\frac{8}{9}}=\frac{5\frac{22}{175}}{7\frac{19}{63}}=\frac{897}{175}:\frac{460}{63}=\frac{897.63}{175.460}=$$

$$=\frac{3.13.23.7.9}{5.5.7.4.5.23}=\frac{3.13.9}{5.5.5.4}=\frac{351}{500}.$$

Примѣчание. Повѣрка четырехъ основныхъ дѣйствій надъ дробями производится точно такъ же, какъ и повѣрка этихъ самыхъ дѣйствій для цѣлыхъ чиселъ.

ОТДѢЛЪ VI.

Десятичныя дроби.

О десятичныхъ дробяхъ; общія ихъ свойства.

§ 87. Всякая дробь, имѣющая знаменателемъ 10, 100, 1000 и проч., однимъ словомъ *единицу* съ нѣсколькими *нулями*, называется *десятичною дробью*. Такъ дроби $\frac{7}{10}$, $\frac{83}{10}$, $\frac{36}{100}$, $\frac{81}{1000}$, и т. п. суть *десятичныя*. При такомъ видѣ знаменателей, изображеніе этого рода дробей и самыя дѣйствія надъ ними становятся проще, нежели для дробей обыкновенныхъ.

Вспомнимъ, что по условію, принятому въ десятичномъ счисленіи, всякая цифра получаетъ значеніе въ десять разъ бо̀льшее противъ первоначальнаго, когда по правую ея сторону ставимъ *нуль*. Напримѣръ, чтобы написать *три десятка*, приписываемъ съ правой стороны цифры *три* знакъ *нуль*, и получаемъ 30, то есть *тридцать*. Если бы приписали еще одинъ *нуль*, то увеличили бы значеніе *тридцати* въ десять разъ, и получили бы 300, то есть *триста* или *десять разъ тридцать*, или еще *сто разъ три*. Вообще, когда идемъ отъ

правой руки къ лѣвой, то одна и та же цифра увеличивается въ *десять* разъ на второмъ мѣстѣ, во *сто* разъ на третьемъ, въ *тысячу* разъ на четвертомъ, и такъ далѣе. Поэтому, въ цѣломъ числѣ 3333, первая цифра съ правой стороны означаетъ *три простыя единицы*, вторая въ *десять* разъ больше, и изображаетъ *тридцать*, третья во *сто* разъ больше трехъ единицъ, и изображаетъ *триста*, четвертая въ *тысячу* разъ больше, и означаетъ *три тысячи*. На-оборотъ, если пойдемъ отъ лѣвой руки къ правой, то значенія одной и той-же цифры будутъ по порядку становиться меньше первоначальнаго въ *десять* разъ, во *сто* разъ, въ *тысячу* разъ, и такъ далѣе.

Сообразно съ этимъ можно условиться въ томъ, что если напишемъ нуль съ лѣвой стороны цифры, то она получитъ значеніе въ *десять* разъ мѐньшее противъ первоначальнаго. Поэтому, для изображенія *трехъ десятыхъ* простой единицы, мы можемъ написать 03. Чтобъ изобразить *десятую* часть отъ *трехъ десятыхъ*, или, что̀ всё равно, *сотую* часть отъ трехъ простыхъ единицъ, должно приписать нуль съ лѣвой стороны 03, и получится 003, то есть *три сотыя*, и такъ далѣе. Ясно, что въ слѣдствіе такого условія, мы будемъ въ состояніи изображать всякую десятичную дробь, не имѣя надобности писать ея знаменатель, который въ такомъ случаѣ самъ собой обнаружится. Сверхъ того, какъ въ вычисленіяхъ не рѣдко десятичныя дроби сопровождаются цѣлыми числами, то послѣдній нуль съ лѣвой стороны согласились отдѣлять отъ десятичныхъ частей или отъ другихъ нулей точкою, или, чаще, запятою. Поэтому, вмѣсто $03 = \frac{3}{10}$ пишутъ 0.3 или 0,3; вмѣсто $003 = \frac{3}{100}$, пишутъ 0,03; вмѣсто $0003 = \frac{3}{1000}$, ставятъ 0,003 и такъ далѣе. Когда при десятичной дроби будетъ находиться цѣлое число, а это значитъ что разсматриваемая дробь неправильная, то на мѣстѣ отдѣленнаго нуля пишутъ простыя единицы этого цѣлаго числа. Напримѣръ, если бы

желали представить дробь $\frac{275043}{10000}$ въ видѣ десятичной, то замѣтивъ что

$$\frac{275043}{10000}=\frac{270000}{10000}+\frac{5000}{10000}+\frac{40}{10000}+\frac{3}{10000}$$
$$=27+\frac{5}{10}+\frac{4}{1000}+\frac{3}{10000},$$

получили бы дробь 27,5043, которая выговаривается слѣдующимъ образомъ: 27 *цѣлыхъ и* 5043 *десятитысячныхъ*, или еще: 27 *цѣлыхъ*, 5 *десятыхъ*, *нуль сотыхъ*, 4 *тысячныхъ*, 3 *десятитысячныхъ*.

И такъ, повторяемъ, для изображенія въ десятичномъ видѣ цѣлаго числа съ десятичными частями, надобно написать сперва данное цѣлое число, потомъ поставить запятую, отъ которой уже пишутся по порядку, отъ лѣвой руки къ правой, сперва *десятыя*, потомъ *сотыя*, *тысячныя*, *десятитысячныя* и такъ далѣе, замѣщая нулемъ тѣ десятичные разряды, которыхъ не достаетъ въ предложенныхъ дробяхъ. Такъ, слѣдуя этому правилу, найдемъ, что

$$2860\frac{760038}{10000000}$$

выражается слѣдующею неправильною десятичною дробью:

2860,0760038,

которая произносится: 2860 *цѣлыхъ* и 760038 *десяти-милліонныхъ*.

§ 88. Такъ какъ знаменатель десятичной дроби всегда равенъ единицѣ, сопровождаемой однимъ или нѣсколькими нулями, то *сокращеніе* десятичныхъ дробей или приведеніе ихъ къ простѣйшему виду только тогда возможно, когда числитель дѣлится на-цѣло на 10, или на 100, или на 1000 и проч., и слѣдовательно, когда онъ оканчивается однимъ или нѣсколькими нулями (§ 71). Ясно, что для сокращенія подобной дроби, достаточно зачеркнуть съ правой стороны всѣ на-

ходящіеся въ ней сряду нули. И такъ, дроби 0,360, 21,5900, 6,001000, изъ которыхъ первая изображаетъ *тысячныя*, вторая *десятитысячныя*, третья *милліонныя*, по сокращеніи обращаются въ 0,36, 21,59, 6,001; такимъ образомъ первая и вторая изъ данныхъ дробей привелись къ *сотымъ*, а послѣдняя къ *тысячнымъ*.

Для *приведенія нѣсколькихъ десятичныхъ дробей къ одному знаменателю* стоитъ только приписать къ этимъ дробямъ съ правой стороны послѣдней цифры столько нулей, сколько нужно для того, чтобъ у каждой изъ нихъ было одинаковое число десятичныхъ знаковъ. Напримѣръ, для приведенія къ одному знаменателю трехъ дробей

1,203 25,6 363,5306

смотримъ сперва, которая изъ нихъ имѣетъ *наибольшее* число десятичныхъ знаковъ, и усматриваемъ, что послѣдняя состоитъ изъ *четырехъ* знаковъ, между тѣмъ какъ первая только изъ *трехъ*, а вторая изъ *одного* знака. И такъ, для дополненія недостающихъ десятичныхъ знаковъ, приписываемъ къ первой дроби *одинъ нуль*, а ко второй *три нуля*, и получаемъ

1,2030 25,6000 363,5306;

каждая изъ этихъ дробей имѣетъ знаменателемъ число 10000. Чтобъ увѣриться въ справедливости этого правила, стоитъ только замѣтить, что присовокупленіе нулей къ десятичной дроби, съ правой стороны, не измѣняетъ ея значенія. И въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ десятичная дробь 0,6; найдется послѣдовательно, какъ уже показано въ § 61,

$$0,6=\frac{6}{10}=\frac{6\times 10}{10\times 10}=\frac{60}{100}=0,60, \qquad \frac{60}{100}=\frac{600}{1000}=0,600.$$

и такъ далѣе.

Переходимъ теперь къ основнымъ четыремъ дѣйствіямъ надъ десятичными дробями.

Сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе десятичныхъ дробей.

§ 89. ***Сложеніе*** и ***вычитаніе*** десятичныхъ дробей производится точно такъ, какъ для цѣлыхъ чиселъ; при расположеніи данныхъ дробей, въ обоихъ дѣйствіяхъ, должно наблюдать чтобъ одинакіе разряды цѣлыхъ единицъ стояли одни подъ другими, десятыя доли подъ десятыми, сотыя подъ сотыми, и такъ далѣе. Если, при вычитаніи, данныя двѣ дроби не имѣютъ одинаковаго числа десятичныхъ знаковъ, то прежде всего надлежитъ привести обѣ дроби къ одному знаменателю чрезъ присовокупленіе нулей (§ 88), и потомъ уже начинать дѣйствіе. Вотъ примѣры:

Примѣры сложенія десятичныхъ дробей:

Слагаемыя дроби:	8,036
	0,0078
	23,9861
Сумма:	32,0299
Слагаемыя дроби:	36,152
	389,03673
	58,3184
	1025,91
Сумма:	1509,41713.

Примѣры вычитанія десятичныхъ дробей:

Изъ	7˙3˙5˙,8 2˙3˙0˙0˙6˙6˙1
Вычесть	5 9, 9 0 8 3 0 7 6 2
Разность:	6 7 5, 9 1 4 6 9 8 9 9.

Изъ 71,0036 вычесть 48,9134897. Для приведенія первой дроби къ одному знаменателю со второю, приписываемъ къ ней ***три*** нуля, и потомъ производимъ дѣйствіе обыкновеннымъ образомъ, какъ показано ниже:

7˙1˙,0˙0 3 6˙0˙0˙0
4 8, 9 1 3 4 8 9 7
2 2, 0 9 0 1 1 0 3.

§ 90. Для *умноженія* десятичной дроби на другую, также десятичную, откидываемъ запятыя въ обѣихъ дробяхъ, и перемножаемъ ихъ какъ цѣлыя числа: потомъ, въ найденномъ произведеніи, отдѣляемъ запятою, отъ правой руки къ лѣвой, столько десятичныхъ знаковъ, сколько ихъ находится вмѣстѣ въ данныхъ двухъ дробяхъ. Если случится, что произведеніе не имѣетъ достаточнаго числа десятичныхъ знаковъ для отдѣленія ихъ запятою, то надобно дополнить это число нулями, приписывая ихъ съ лѣвой стороны произведенія, и поставить еще ***одинъ нуль*** на мѣстѣ цѣлыхъ простыхъ единицъ. Ясно, что если бы одно изъ двухъ данныхъ чиселъ было цѣлое, то произведеніе имѣло бы столько десятичныхъ знаковъ, сколько находится ихъ въ умножаемой дроби. Когда цѣлое число будетъ 10, 100, 1000 и проч., то умноженіе производится подвинувъ запятую въ умножаемой десятичной дроби вправо на одинъ, на два, на три знака, и вообще на столько цифръ, сколько слѣдуетъ нулей за единицею.

Сказанное объ умноженіи десятичныхъ дробей слѣдуетъ прямо изъ правила, служащаго для перемноженія обыкновенныхъ дробей. Дѣйствительно, мы видѣли (§ 82), что произведеніе двухъ дробей равняется произведенію числителей, раздѣленному на произведеніе знаменателей. Въ десятичныхъ дробяхъ произведеніе знаменателей, или, знаменатель произведенія, будетъ единица съ столькими нулями, сколько ихъ было въ знаменателяхъ обѣихъ дробей. Но какъ число этихъ нулей равно вмѣстѣ съ тѣмъ и числу десятичныхъ цифръ, заключающихся въ обѣихъ дробяхъ, то и въ произведеніи должно будетъ отдѣлить запятою столько же десятичныхъ знаковъ.

Примѣры умноженія десятичныхъ дробей:

Найти произведеніе десятичной дроби 31,563 на цѣлое число 781; отбросивъ запятую во множимомъ, получимъ

Множимое:	31563
Множитель:	781
	31563
	252504
	220941
Произведеніе:	24650703,

и какъ во множимомъ имѣемъ *три* десятичные знака, то и будетъ

$$31{,}563 \times 781 = 24650{,}703.$$

Найти произведеніе двухъ десятичныхъ дробей 23,713 и 6,26. Получимъ

	23713
	626
	142278
	47426
	142278
Произведеніе:	14844338,

и, по отдѣленіи запятою *пяти* знаковъ,

$$23{,}713 \times 6{,}26 = 148{,}44338.$$

Вотъ еще примѣры:

$$65{,}36 \times 100 = 6536, \qquad 0{,}00638 \times 10000 = 63{,}8.$$

Найти произведеніе $6{,}12 \times 0{,}0035$; будетъ

	612
	35
	3060
	1836
Произведеніе:	21420.

Такъ какъ умножаемыя дроби имѣютъ вмѣстѣ *шесть* десятичныхъ знаковъ, то съ лѣвой стороны найденнаго произведенія,

состоящаго только изъ *пяти* цифръ, должно приписать *одинъ* нуль, и еще одинъ для означенія мѣста цѣлыхъ простыхъ единицъ. Такимъ образомъ искомое произведеніе будетъ 0,021420. Отбросивъ послѣдній нуль съ правой стороны, получимъ

$$6,12 \times 0,0035 = 0,02142.$$

§ 91. Для *раздѣленія* одной десятичной дроби на другую, приписываемъ къ той изъ нихъ, у которой менѣе десятичныхъ цифръ, столько дополнительныхъ нулей съ правой стороны, сколько нужно для того, чтобъ у обѣихъ дробей было одинаковое число десятичныхъ знаковъ; потомъ откидываемъ запятыя, и получаемъ два цѣлыя числа, надъ которыми производимъ дѣленіе по обыкновеннымъ правиламъ. Очевидно, что такимъ образомъ получимъ искомый результатъ дѣленія, ибо, откидывая запятую въ обѣихъ дробяхъ, мы въ одно время увеличиваемъ какъ дѣлимое, такъ и дѣлитель въ 10, во 100, въ 1000......разъ, чрезъ что̀ частное не измѣнится (§ 61).

Если, изъ данныхъ двухъ чиселъ для дѣленія, только одно изображается десятичною дробью, а другое будетъ цѣлое число, то къ цѣлому числу приписываемъ столько нулей, сколько дробь имѣетъ десятичныхъ знаковъ, а запятую въ дроби откидываемъ. Такимъ образомъ вопросъ приведется къ обыкновенному дѣленію цѣлыхъ чиселъ. Отсюда слѣдуетъ, что для раздѣленія десятичной дроби на 10, на 100, на 1000........, стоитъ только переставить ея запятую въ лѣвую сторону на одинъ, на два, на три......десятичные знака, приписавъ, если нужно, нѣсколько нулей съ лѣвой же стороны дѣлимой дроби.

Примѣры дѣленія десятичныхъ дробей:

Раздѣлить 245,30256 на 4,32.

$$\frac{24530256}{432000} = 56\frac{338256}{432000} = 56\frac{783}{1000} = 56,783.$$

Раздѣлить 0,0196 на 0,35.

$$\frac{196}{3500}=\frac{4.7.7}{5.7.100}=\frac{28}{500}=\frac{56}{1000}=0,056.$$

$$\frac{35,00367}{1000}=0,03500367; \qquad \frac{8362,569}{100}=83,62569.$$

Раздѣлить цѣлое число 28 на десятичную дробь 6,32. Получимъ

$$\frac{2800}{632}=4\frac{272}{632}=4\frac{34}{79}.$$

Въ этомъ примѣрѣ результатъ дѣленія заключаетъ въ себѣ обыкновенную дробь $\frac{34}{79}$, а не десятичную. Въ слѣдующемъ § мы увидимъ, какимъ образомъ всякую обыкновенную дробь можно превратить въ десятичную.

Повѣрка четырехъ основныхъ дѣйствій надъ десятичными дробями производится точно такъ какъ для цѣлыхъ чиселъ.

Обращеніе обыкновенныхъ дробей въ десятичныя и о періодическихъ десятичныхъ дробяхъ.

§ 92. Чтобъ обратить обыкновенную правильную дробь въ десятичную, приписываемъ къ числителю столько нулей, сколько нужно для того, чтобъ этотъ числитель былъ болѣе знаменателя. Чрезъ такое присовокупленіе одного, двухъ, трехъ.......нулей, мы увеличиваемъ данную дробь въ десять разъ, во сто, въ тысячу и такъ далѣе; поэтому, самый результатъ дѣленія новаго числителя на знаменатель, по числу приписанныхъ нулей, будетъ изображать *десятыя*, или *сотыя*, или *тысячныя*.......доли цѣлой единицы. Точно такимъ образомъ дѣйствуемъ надъ первымъ остаткомъ дѣленія, и получаемъ вторую десятичную цифру частнаго. Продолжая то̀ же дѣйствіе надъ вторымъ, третьимъ и дальнѣйшими остатками, найдемъ третью, четвертую и прочія цифры десятичной дроби, выражающей данную обыкновенную дробь.

Слѣдовательно, для превращенія правильной обыкновенной дроби въ десятичную, должно приписать къ числителю нѣсколько нулей, и дѣлить числитель на знаменатель по обыкновеннымъ правиламъ. Такъ какъ вообще число этихъ дополнительныхъ нулей неизвѣстно въ началѣ дѣйствія, то можно приписывать по одному нулю къ числителю во время самаго дѣленія, пока получаются остатки. Когда же дойдемъ до дѣленія безъ остатка, то дѣйствіе кончено; придется только уменьшить частное во столько разъ, во сколько увеличено дѣлимое, то есть числитель предложенной дроби, а именно: въ 10 разъ если приписали *одинъ* нуль, во 100 разъ если приписано *два* нуля, въ 1000 разъ если *три* нуля, и такъ далѣе. Чтобъ уменьшить такимъ образомъ частное, стоитъ только отдѣлить въ немъ, отъ правой руки къ лѣвой, столько десятичныхъ знаковъ, сколько приписано было нулей къ числителю. Если же случится, что дѣленіе не оканчивается, то есть не доходимъ до остатка нуль, то прекращаемъ дѣйствіе по полученіи требуемаго числа десятичныхъ цифръ, равнаго, какъ мы уже видѣли, числу нулей, приписанныхъ къ числителю данной дроби.

Точно такъ же поступаемъ и для превращенія неправильной обыкновенной дроби въ десятичную; но какъ въ этомъ случаѣ числитель болѣе знаменателя, то можемъ начать дѣленіе безъ присовокупленія нулей, а приписывать ихъ уже послѣ, по мѣрѣ надобности.

Примѣры. Превратить $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{25}$, $\frac{23}{20}$, $\frac{411}{125}$ въ десятичныя дроби.

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \cline{2-2} 28 & 0{,}75 = \frac{3}{4} \\ \hline 20 & \\ 20 & \\ \hline 0. & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 25 \\ \cline{2-2} 50 & 0{,}24 = \frac{6}{25} \\ \hline 100 & \\ 100 & \\ \hline 0. & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 23 & 20 \\ \underline{20} & 1,15=\frac{23}{20} \\ 30 & \\ \underline{20} & \\ 100 & \\ \underline{100} & \\ 0. & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 411 & 125 \\ \underline{375} & 3,288=\frac{411}{125} \\ 360 & \\ \underline{250} & \\ 1100 & \\ \underline{1000} & \\ 1000 & \\ \underline{1000} & \\ 0. & \end{array}$$

Въ этихъ примѣрахъ данныя обыкновенныя дроби превратились точнымъ образомъ въ десятичныя. Но это не всегда бываетъ; такъ напримѣръ, обращая $\frac{5}{12}$ въ десятичную дробь, получимъ

$$\begin{array}{r|l} 50 & 12 \\ \underline{48} & 0,4166\ldots=\frac{5}{12} \\ 20 & \\ \underline{12} & \\ 80 & \\ \underline{72} & \\ 80 & \\ \underline{72} & \\ 8 & \text{и такъ далѣе.} \end{array}$$

Здѣсь первый остатокъ 2, второй 8, третій и четвертый также 8; очевидно, что и всѣ послѣдующіе остатки будутъ равняться *осьми*. Слѣдовательно, дѣленіе никогда не кончится, и десятичная цифра 6, происшедшая отъ повторяющагося остатка 8, сама повторится неопредѣленно. Такія десятичныя дроби называются *безконечными*. Покажемъ теперь же признакъ, по которому очень легко судить, выражается ли данная

обыкновенная дробь конечною, или безконечною десятичною дробью.

Обыкновенная несократимая дробь выразится *конечною* десятичною только въ томъ случаѣ, когда знаменатель ея не будетъ содержать другихъ простыхъ множителей, какъ только 2 и 5. Если же этотъ знаменатель будетъ дѣлиться на какія ни есть другія простыя числа, какъ напримѣръ на 3, на 7, на 11 и проч., то хотя бы онъ и заключалъ въ себѣ множители 2 и 5, данная дробь не превратится въ конечную десятичную.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ дѣйствіе обращенія требуетъ, чтобы къ числителю данной дроби приписали нули, то есть помножили его на 10, на 100, на 1000 и проч., то дѣленіе на знаменатель произведется безъ остатка, если этотъ знаменатель будетъ дѣлить на̀-цѣло одно изъ чиселъ 10, 100, 1000 и проч. Съ другой же стороны такъ какъ

$$10 = 2.5$$
$$100 = 2.5.2.5$$
$$1000 = 2.5.2.5.2.5$$

и проч.

то и заключаемъ, основываясь на 2-мъ Предложеніи (Отдѣлъ IV, § 68), что если въ знаменатель данной несократимой дроби будутъ входить множителями только числа 2 и 5, повторенныя сколько угодно разъ, то она всегда приведется къ *конечной* десятичной дроби. Напротивъ того, если бы этотъ знаменатель содержалъ въ себѣ хотя одинъ простой множитель, отличный отъ 2 и 5, какъ напримѣръ 3, 7, 11 и проч., то данная обыкновенная дробь привела бы къ *безконечной* десятичной. Дѣйствительно, разсмотримъ такую дробь, положимъ $\frac{7}{6} = \frac{7}{2.3}$, у которой знаменатель заключаетъ множитель 3, отличный отъ 2 и 5. Если допустимъ, что она, по обращеніи, даетъ конечную десятичную, то знаменатель ея $6 = 2.3$ дол-

женъ дѣлить на̀-цѣло одно изъ чиселъ 7.10, 7.100, 7.1000..., то есть произведеніе вида

$$7.2.5.2.5.2.5.......,$$

почему и будетъ

$$7.2.5.2.5.2.5..... = 2.3 \times \textit{цѣлое число};$$

но подобное равенство не можетъ быть допущено: въ самомъ дѣлѣ, изъ него заключили бы, противно сказанному въ § 66 (Отдѣлъ IV), что одно и тò же число разлагается на простые множители двумя различными образами, во первыхъ, на произведеніе 7.2.5.2.5.2.5...., не заключающее простаго числа 3, а во вторыхъ, на произведеніе 2.3 × *цѣлое число*, въ которое входитъ множитель 3.

Вотъ нѣсколько примѣровъ безконечныхъ десятичныхъ дробей.

$$\frac{1}{3} = 0,333333.... \qquad \frac{8}{7} = 1,142857142857.....$$
$$\frac{3}{13} = 0,230769230769.... \qquad \frac{17}{30} = 0,566666....$$
$$\frac{40}{33} = 1,212121.....$$

§ 93. Когда обыкновенная дробь выражается безконечною десятичною дробью, то въ послѣдней непремѣнно нѣкоторыя цифры будутъ повторяться въ одномъ и томъ же порядкѣ. Такого рода дроби называются ***періодическими***. Такъ въ дроби $\frac{1}{3}$ повторяющаяся цифра есть 3, въ дроби $\frac{40}{33}$ повторяющіяся цифры 2 и 1, то есть число 21 и такъ далѣе. Совокупность повторяющихся цифръ называется ***періодомъ*** дроби. Въ приведенныхъ въ концѣ предъидущаго параграфа пяти примѣрахъ, періоды были соотвѣтственно: 3, 142857, 230769, 6 и 21.

Если періодъ начинается съ первой десятичной цифры, то дробь принимаетъ названіе ***простой періодической***, а ежели со второй, или дальнѣйшей, то она называется ***смѣшанною періодическою*** дробью. Такъ 1-ая, 2-ая, 3-я и 5-ая дроби будутъ ***простыя*** періодическія, а 4-ая, ***смѣшанная.***

Чтобъ удостовѣриться, что безконечная десятичная дробь будетъ непремѣнно періодическая, стоитъ только обратить вниманіе на то̀, какъ она выводится изъ обыкновенной. Для этого, числитель данной дроби, съ приписанными къ нему нулями, дѣлятъ на знаменатель, при чемъ получаются остатки, которые не могутъ быть всѣ различны между собою. Дѣйствительно, такъ какъ остатокъ долженъ быть непремѣнно менѣе дѣлителя, который въ настоящемъ случаѣ есть знаменатель предложенной дроби, то остатковъ, различныхъ между собою, не можетъ быть болѣе числа единицъ, заключающихся въ этомъ знаменателѣ, уменьшенномъ одною единицею. И такъ, послѣ нѣсколькихъ дѣленій, получится одинъ изъ прежнихъ остатковъ, а слѣдовательно и прежняя цифра въ частномъ числѣ; далѣе, какъ остатки будутъ возвращаться въ прежнемъ порядкѣ, то и цифры въ частномъ числѣ будутъ повторяться, и составятъ *періодъ*.

Если знаменатель несократимой дроби, обращаемой въ десятичную, не будетъ дѣлиться ни на 2, ни на 5, то получимъ *простую* періодическую; напротивъ того, когда въ этотъ знаменатель, сверхъ другихъ множителей, войдетъ число 2, или 5, или оба, повторенныя сколько угодно разъ, то получаемая десятичная дробь будетъ *смѣшанная* періодическая. Чтобъ узнать въ послѣднемъ случаѣ, съ какой именно десятичной цифры начнется періодъ, стоитъ только отдѣлить въ знаменателѣ превращаемой дроби всѣ дѣлители, равные 2 и 5, и сосчитать сколько разъ каждый изъ нихъ повторяется; наибо̀льшее число повтореній того или другаго, безразлично, изобразитъ число десятичныхъ знаковъ, предшествующихъ періоду. Такъ напримѣръ, превращая дробь $\frac{7}{550}$ въ десятичную, получимъ

$$\frac{7}{550} = 0{,}01272727\ldots..;$$

здѣсь періоду 27 предшествуютъ *двѣ* цифры 0 и 1, потому

что знаменатель $550 = 2.5^2.11$ заключаетъ въ себѣ множителемъ число 5 *два* раза (*).

Вотъ нѣсколько другихъ примѣровъ *простыхъ* и *смѣшанныхъ* періодическихъ десятичныхъ дробей:

$$\frac{4}{11} = 0,363636....., \qquad \frac{71}{33} = 2,151515.....$$

$$\frac{7}{24} = \frac{7}{2.2.2.3} = 0,291666....., \qquad \frac{1}{75} = \frac{1}{5.5.3} = 0,013333.....$$

$$\frac{47}{70} = \frac{47}{2.5.7} = 0,6714285714285..., \quad \frac{17}{220} = \frac{17}{2.2.5.11} = 0,07727272.....$$

§ 94. Превращеніе *конечной* десятичной дроби, а равно и *періодической* въ обыкновенную дробь, не представляетъ никакого затрудненія. Для приведенія конечной десятичной дроби къ обыкновенной, откидываютъ запятую, и подписываютъ подъ полученнымъ цѣлымъ числомъ знаменатель, то есть единицу со столькими нулями, сколько въ данной дроби десятичныхъ знаковъ. Если полученная такимъ образомъ обыкновенная дробь сокращается, то приводятъ ее къ простѣйшему виду, испытывая дѣлить числитель на простые дѣлители 2 и 5 нѣсколько разъ сряду. Такъ если бы дана была дробь 0,425, то нашли бы

$$0,425 = \frac{425}{1000} = \frac{17.5.5}{40.5.5} = \frac{17}{40}.$$

Превращеніе *періодической* десятичной дроби также очень просто, что̀ можно видѣть изъ слѣдующихъ двухъ примѣровъ:

Возьмемъ сперва *простую* періодическую дробь, напримѣръ 0,27272727..... Вмѣсто того чтобъ писать прописью *искомая обыкновенная дробь* = 0,27272727....., мы эту искомую обыкновенную дробь, въ которую желаемъ обратить безконечную

(*) Самое доказательство признака разложимости обыкновенной несократимой дроби на *простую* и на *смѣшанную* періодическую, помѣщено въ концѣ книги въ особомъ Дополненіи.

десятичную, изображаемъ для простоты одною буквою, напримѣръ *x-омъ.* Тогда будетъ

$$x = 0{,}27272727.....$$

Помножаемъ это равенство на число, изображенное единицею со столькими нулями, сколько находится цифръ въ періодѣ, то есть на 100. Найдется

$$100.x = 27{,}272727.....$$

Если вычтемъ отсюда $x = 0{,}27272727.....$, наблюдая притомъ, что десятичныя доли какъ въ уменьшаемомъ, такъ и въ вычитаемомъ числѣ совершенно одинаковы, и именно равны 0,27272727.....до безконечности, то получимъ просто

$$99.x = 27,$$

откуда

$$x = \frac{27}{99} = \frac{3.9}{11.9} = \frac{3}{11}.$$

Возьмемъ теперь *смѣшанную* періодическую дробь

$$x = 5{,}23165165165.....$$

Помножаемъ ее сперва на число, выражающееся единицею со столькими нулями, сколько находится въ этой дроби десятичныхъ знаковъ до начала періода, вмѣстѣ съ числомъ цифръ самаго періода; въ настоящемъ случаѣ число нулей будетъ $2 + 3 = 5$. И такъ, данную дробь надобно помножить на 100000; поэтому получимъ

$$100000.x = 523165{,}165165165.....$$

Далѣе: помножаемъ первоначальную дробь на число, выражающееся единицею со столькими нулями, сколько находится десятичныхъ цифръ до начала періода; въ настоящемъ случаѣ *двѣ*. Получится

$$100.x = 523{,}165165165.....$$

Вычтя это равенство изъ предъидущаго, найдемъ

$$100000 . x = 523165,165165165....$$

вычтя $100 . x = 523,165165165....$

$$99900 . x = 522642$$

откуда

$$x = \frac{522642}{99900} = \frac{87107.6}{16650.6} = \frac{87107}{16650}.$$

§ 95. Въ заключеніе статьи о десятичныхъ дробяхъ, сдѣлаемъ о нихъ еще нѣкоторыя замѣчанія, которыя полезно будетъ имѣть въ виду.

Нерѣдко случается, что въ вычисленіяхъ мы довольствуемся ***приближенными величинами***, то есть такими, которыя очень близки къ настоящей величинѣ. Положимъ, напримѣръ, что требуется раздѣлить 1232 рубля 37 копѣекъ, по̀-ровну, между 1000 человѣками: настоящая доля каждаго будетъ 1 рубль и 0,23237 рубля, то есть одинъ рубль, двѣ десятыя рубля, три сотыя, двѣ тысячныя, три десяти-тысячныя и семь сто-тысячныхъ рубля. Но какъ нѣтъ монеты для тысячныхъ, десяти-тысячныхъ и другихъ, весьма малыхъ частей рубля, то мы и сказали бы, что на долю каждаго человѣка приходится, ***круглымъ числомъ***, по ***одному рублю*** и 23 ***копѣйки.*** Здѣсь, въ десятичной дроби 0,23237, мы откинули бы часть 0,00237 по причинѣ ея малости. Положимъ еще, что въ дроби 0,13072973 желаемъ удержать ***пять*** десятичныхъ знаковъ; это значитъ, что мы откидываемъ, по причинѣ малости, дробь $\frac{973}{100000000}$, которая очевидно менѣе $\frac{1000}{100000000} = \frac{1}{100000}$, то есть менѣе ***одной сто-тысячной.*** Но, въ такомъ случаѣ, для бо̀льшей точности, вмѣсто дроби 0,13072, мы написали бы 0,13073, увеличивъ послѣднюю цифру, именно 2, одною единицею. Причину этого легко понять замѣтивъ, что разность между 0,13073 и истинною дробью будетъ менѣе, нежели разность между этою истинною дробью и приближенною 0,13072. И такъ, мы можемъ принять за правило, что ***послѣдняя удер-***

живаемая цифра въ приближенной десятичной дроби должна быть увеличена единицею, когда непосредственно слѣдующая за нею цифра съ правой стороны будетъ 5, *или больше* 5-*ти*; если же за удерживаемою цифрою слѣдуетъ число мѐньшее 5-ти, то цифра та остается безъ перемѣны. Вотъ примѣры:

Удержать въ дроби 1,378962 *четыре* цифры; получится 1,3790 = 1,379. Удержать въ этой самой дроби *пять* цифръ; получится 1,37896. Въ дроби 0,3155 удержать *три* цифры; найдется 0,316 или 0,315, по произволенію, потому что разности 0,316 — 0,3155 и 0,3155 — 0,315 одинаковы. Но если за откидываемою цифрою 5 будутъ еще находиться десятичные знаки, то предъидущая цифра увеличивается единицею; такъ удерживая *двѣ* цифры въ дроби 0,13501, должно принять предпочтительно за приближенную дробь 0,14, а не 0,13.

Когда первыя цифры десятичныхъ дробей различны между собою, то ясно что наибо̀льшая изъ этихъ дробей будетъ та, у которой первыя цифры больше. Поэтому 0,7 > 0,69973, 0,378 > 0,377835, 1,46387 > 1,4619 и проч. Въ этомъ случаѣ число лишнихъ десятичныхъ знаковъ нисколько не нарушаетъ неравенства; и такъ 0,7 болѣе 0,69973 не смотря на то̀, что вторая дробь имѣетъ *четыре*, лишніе противъ первой, десятичные знака.

Изъ сказаннаго здѣсь объ относительной величинѣ десятичныхъ дробей заключаемъ, что стоитъ только взглянуть на данныя дроби, чтобы прямо сказать, котора̀я изъ нихъ есть наибо̀льшая. Это самое составляетъ значительное ихъ преимущество предъ обыкновенными дробями, которыя, при томъ же самомъ требованіи, должны быть сперва приведены къ одному знаменателю или числителю (§ 58). Сверхъ того, дѣйствія надъ десятичными дробями производятся какъ надъ цѣлыми числами, и слѣдовательно проще тѣхъ же дѣйствій надъ обыкновенными дробями.

Прибавимъ еще и то̀, что по привычкѣ къ десятичному численію, дробь десятичная вообще гораздо яснѣе чѣмъ обыкновенная представляетъ намъ величину изображаемой ею части единицы; преимущественно же это можно замѣтить въ томъ случаѣ, когда числитель и знаменатель обыкновенной дроби будутъ числа довольно большія. Такъ, напримѣръ, десятичная дробь

$$0{,}519003\ldots = \frac{396}{763}$$

съ перваго взгляда показываетъ, что значеніе $\frac{396}{763}$ будетъ немногимъ болѣе *пяти десятыхъ*, то есть $\frac{1}{2}$ цѣлой единицы. Принимая въ расчётъ два знака, усмотримъ, что дробь будетъ болѣе $\frac{51}{100}$, но менѣе $\frac{52}{100}$, хотя и ближе къ послѣдней величинѣ. Такимъ образомъ мы получаемъ довольно точное понятіе о той части единицы, которую изображаетъ данная дробь; что̀ же касается до дроби обыкновенной $\frac{396}{763}$, то, до превращенія ея въ десятичную, мы не можемъ составить себѣ вдругъ такого яснаго понятія о ея величинѣ.

Для упражненія, предлагаемъ нѣсколько примѣровъ различныхъ дѣйствій надъ десятичными дробями въ совокупленіи съ цѣлыми числами и съ обыкновенными дробями:

$$\left(6 + \frac{3}{7} \times 0{,}364\right) \times \left(\frac{3}{4} - 0{,}685\right) = 6{,}156 \times 0{,}065$$
$$= 0{,}40014.$$

$$\left(5 \times 0{,}11111\ldots\ldots - \frac{1}{11}\right) \times \frac{6}{23} = 0{,}121212\ldots\ldots$$

$$\frac{7}{6} : 0{,}536 = \frac{7000}{6 \times 536} = 2{,}17661\ldots\ldots$$

$$\frac{8 - \frac{2}{5} + 0{,}361}{5 + \frac{1}{3} \times 2{,}73 - 0{,}281} = \frac{7{,}961}{5{,}629} = 1{,}41428\ldots\ldots$$

Точки, поставленныя послѣ крайней цифры десятичной дроби, означаютъ, что она безконечная.

ОТДѢЛЪ VII.

Понятіе о непрерывныхъ дробяхъ.

§ 96. Въ предъидущемъ § замѣчено, что когда обыкновенная дробь превращена въ десятичную, то можно прямо судить о ея величинѣ съ такою степенью точности, какой пожелаемъ. Есть еще другаго рода дроби, называемыя *непрерывными* или *цѣпными*, которыя также ведутъ къ этой цѣли; сверхъ того онѣ имѣютъ и другое преимущество, представляя легкое средство для приблизительнаго изображенія въ возможно-простѣйшемъ видѣ такихъ несократимыхъ дробей, у которыхъ числители и знаменатели выражаются большими числами.

Положимъ напримѣръ, что дана обыкновенная несократимая дробь $\frac{178}{793}$. Чтобы составить себѣ приблизительное понятіе о той части единицы, которую она изображаетъ, раздѣляемъ оба ея члена на числитель 178; дробь не перемѣнитъ своей величины, и мы получимъ

$$\frac{178}{793}=\frac{1}{\frac{793}{178}}=\frac{1}{4+\frac{81}{178}}.$$

Если теперь, вмѣсто послѣдняго знаменателя $4+\frac{81}{178}$, удержимъ только цѣлую его часть 4, то знаменатель уменьшится, и получаемая приближенная дробь $\frac{1}{4}$ будетъ *болѣе* $\frac{178}{793}$ (§ 59). Напротивъ того, если бы вмѣсто правильной дроби $\frac{81}{178}$ написали 1, то получилась бы дробь $\frac{1}{4+1}=\frac{1}{5}$, у которой знаменатель болѣе настоящаго $4+\frac{81}{178}$; слѣдовательно $\frac{1}{5}$ *менѣе* $\frac{178}{793}$. Изъ этого видимъ, что предложенная дробь $\frac{178}{793}$ заключается между двумя другими, болѣе простыми по виду, именно, между $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{4}$; къ тому жъ, какъ разность $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$, то увѣрены, что принявъ $\frac{1}{5}$ или $\frac{1}{4}$ за приближенное значеніе дроби $\frac{178}{793}$, дѣлаемая погрѣшность будетъ менѣе $\frac{1}{20}$.

Если покажется, что неизвѣстная погрѣшность, хотя мéнь-

шая $\frac{1}{20}$, еще слишкомъ значительна, и желаемъ найти дробь ближе $\frac{1}{4}$ подходящую къ данной, то поступаемъ съ дробью $\frac{81}{178}$ точно такъ какъ поступили съ первоначальною $\frac{178}{793}$, а именно: раздѣляемъ оба члена дроби $\frac{81}{178}$ на числитель 81, и находимъ

$$\frac{81}{178}=\frac{1}{\frac{178}{81}}=\frac{1}{2+\frac{16}{81}};$$

откинувъ $\frac{16}{81}$, дробь $\frac{81}{178}$ замѣнится $\frac{1}{2}$, при чемъ $\frac{1}{2}>\frac{81}{178}$. Слѣдовательно, новое приближенное значеніе данной дроби $\frac{178}{793}$ будетъ

$$\frac{1}{4+\frac{1}{2}}=\frac{2}{2.4+1}=\frac{2}{9}.$$

Необходимо замѣтить, что $\frac{2}{9}<\frac{178}{793}$; дѣйствительно, знаменатель $4+\frac{1}{2}$ болѣе надлежащаго, ибо, вмѣсто настоящей дроби $\frac{81}{178}$, мы написали $\frac{1}{2}$, а $\frac{1}{2}>\frac{81}{178}$.

И такъ, мы имѣемъ теперь два приближенія $\frac{1}{4}$ и $\frac{2}{9}$; если возьмемъ ихъ разность $\frac{1}{4}-\frac{2}{9}=\frac{1}{36}$, то увидимъ, что принявъ за настоящую дробь $\frac{178}{793}$ одну изъ двухъ приближенныхъ $\frac{1}{4}$ или $\frac{2}{9}$, дѣлаемая погрѣшность будетъ менѣе $\frac{1}{36}$. Изъ этого заключаемъ, что вообще выгоднѣе искать второе приближеніе, какъ сдѣлано здѣсь, чѣмъ при первомъ увеличивать цѣлое число въ знаменателѣ одною единицею. И въ самомъ дѣлѣ, получивъ сперва дроби $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$, мы нашли, что погрѣшность менѣе $\frac{1}{20}$, а здѣсь, имѣя два приближенія $\frac{1}{4}$ и $\frac{2}{9}$, погрѣшность оказывается еще менѣе того, ибо она менѣе $\frac{1}{36}$.

Точно такимъ образомъ получимъ и третье приближеніе. Для этого возьмемъ найденное выше равенство

$$\frac{81}{178}=\frac{1}{2+\frac{16}{81}},$$

и дадимъ дроби $\frac{16}{81}$ видъ

$$\frac{16}{81}=\frac{1}{\frac{81}{16}}=\frac{1}{5+\frac{1}{16}}.$$

Если отбросимъ $\frac{1}{16}$, то приближенное значеніе дроби $\frac{16}{81}$ будетъ $\frac{1}{5}$, при чемъ $\frac{1}{5}>\frac{16}{81}$. И такъ, третье приближеніе будетъ

$$\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{5}}}=\frac{1}{4+\frac{5}{2.5+1}}=\frac{2.5+1}{4.(2.5+1)+5}=\frac{11}{49},$$

и, подобно предъидущему, увидимъ что $\frac{11}{49}>\frac{178}{793}$.

Такъ какъ разность между третьимъ и вторымъ приближеніемъ, именно $\frac{11}{49}-\frac{2}{9}=\frac{1}{441}$, то заключаемъ, что принявъ вмѣсто первоначальной дроби одну изъ двухъ $\frac{2}{9}$ или $\frac{11}{49}$, дѣлаемая погрѣшность будетъ непремѣнно менѣе $\frac{1}{441}$. Здѣсь дѣйствіе кончено, потому что во второй части равенства

$$\frac{16}{81}=\frac{1}{5+\frac{1}{16}}$$

дробь $\frac{1}{16}$ имѣетъ уже числителемъ единицу, а слѣдовательно нѣтъ надобности дѣлить, какъ прежде, оба члена разсматриваемой дроби на ея числитель.

Чтобы поставить на видъ всѣ дѣйствія, которыя мы произвели для полученія послѣдовательныхъ приближеній къ дроби $\frac{178}{793}$, соберемъ равенства, приводящія къ этимъ тремъ приближающимся дробямъ:

$$\frac{178}{793}=\frac{1}{4+\frac{81}{178}},$$ откуда 1-е приближеніе $\frac{1}{4}>\frac{178}{793}$;

$$\frac{81}{178}=\frac{1}{2+\frac{16}{81}};$$ слѣдовательно

$$\frac{178}{793}=\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{16}{81}}};$$

отсюда 2-е приближеніе $\frac{1}{4+\frac{1}{2}}=\frac{2}{9}<\frac{178}{793}$;

$\frac{16}{81}=\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{16}}$, и слѣдовательно

$$\frac{178}{793}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{16}}}};$$

отсюда 3-е приближеніе

$$\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5}}}=\frac{11}{49}>\frac{178}{793}.$$

Здѣсь дѣйствіе прекращается, какъ уже замѣчено выше. Сверхъ того не должно терять изъ виду, что 1-ое приближеніе всегда *болѣе* данной дроби, 2-ое *менѣе* ея, 3-е опять *болѣе*, и такъ далѣе, попеременно, сколько бы не было приближеній. Разность же между двумя послѣдовательными приближеніями равна единицѣ, раздѣленной на произведеніе знаменателей двухъ разсматриваемыхъ приближающихся дробей; такъ $\frac{1}{4}-\frac{2}{9}=\frac{1}{4.9}=\frac{1}{36}$, $\frac{11}{49}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9.49}=\frac{1}{441}$, и наконецъ $\frac{11}{49}-\frac{178}{793}=\frac{1}{49.793}=\frac{1}{38857}$. Сказанное здѣсь о дроби $\frac{178}{793}$ равно справедливо и для всякой другой, для которой стали бы искать послѣдовательныя приближенія по изложенному способу.

§ 97. Выраженіе вида

$$\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{16}}}},$$

равное въ настоящемъ случаѣ $\frac{178}{793}$, называется *непрерывною дробью*, отдѣльныя же дроби $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{16}$ *составляющими дробями*, наконецъ

$$\frac{1}{4},\quad \frac{2}{9}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}},\quad \frac{11}{49}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5}}}$$

приближающимися или *сходящимися дробями*. Слѣдовательно, мы можемъ сказать, что *непрерывная дробь есть такая, у которой знаменатель равенъ цѣлому числу съ дробью, имѣющею*

знаменателемъ опять цѣлое число съ дробью, и такъ далѣе. Числители всѣхъ составляющихъ дробей полагаются, для простоты, равными *единицѣ*, какъ въ приведенномъ сей-часъ примѣрѣ.

Легко было замѣтить, что дѣйствіе, употребленное нами для превращенія обыкновенной дроби $\frac{178}{793}$ въ непрерывную, ничѣмъ не отличалось отъ пріёма, который пришлось бы употребить, еслибъ искали общій наибо̀льшій дѣлитель между двумя членами 178 и 793 данной дроби. Дѣйствительно, мы раздѣлили сперва бо̀льшее число 793 на мѐньшее 178, и удержали частное 4; потомъ 178 раздѣлили на первый остатокъ 81, и удержали частное 2; далѣе: раздѣлили 81 на второй остатокъ 16, и удержали частное 5; наконецъ, получивъ остатокъ 1, дѣйствіе прекратилось на послѣднемъ частномъ числѣ 16. Полученныя частныя 4, 2, 5 и 16 суть не иное что̀, какъ знаменатели составляющихъ дробей. И такъ, дѣйствіе превращенія обыкновенной дроби въ непрерывную одинаково съ пріёмомъ для опредѣленія общаго наибо̀льшаго дѣлителя между двумя данными числами (§ 72), а поэтому и съ послѣдовательнымъ дѣленіемъ одного числа на другое (§ 48, Примѣчаніе).

Для примѣра превращенія обыкновенной дроби въ непрерывную возьмемъ $\frac{117}{1157}$; въ § 48 произведено послѣдовательное дѣленіе надъ двумя членами этой дроби, и найдено:

```
117 | 1157 | 9    1-е частное.
      1053
      ----
       104 | 117 | 1    2-е частное.
             104
             ---
              13 | 104 | 8    3-е частное.
                   104
                   ---
                    0.
```

Слѣдовательно имѣемъ:

$$\frac{117}{1157}=\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8}}};$$

вычисляя приближающіяся дроби, получимъ:

$$\frac{1}{9},\quad \cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1}}=\frac{1}{10},\quad \text{а также}\ \cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8}}}=\frac{9}{89},$$

откуда заключаемъ, что $\frac{117}{1157}=\frac{9}{89}$. Это показываетъ намъ, что предложенная дробь $\frac{117}{1157}$ *сокращается*; и дѣйствительно, изъ приведеннаго сей-часъ вычисленія видимъ, что число 13 есть *общій наибольшій дѣлитель* между 117 и 1157. Раздѣливъ оба члена дроби $\frac{117}{1157}$ на 13, получимъ, какъ и должно быть, $\frac{9}{89}$.

Вотъ еще примѣръ для упражненія со всѣми подробностями вычисленія. Превратить дробь $\frac{304}{683}$ въ непрерывную:

```
304 | 683 | 2    1-е частное.
      608
      ---
       75 | 304 | 4    2-е частное.
            300
            ---
              4 | 75 | 18    3-е частное.
                  4
                  --
                  35
                  32
                  --
                   3 | 4 | 1    4-е частное.
                       3
                       -
                       1 | 3 | 3    5-е частное.
                           3
                           -
                           0.
```

Слѣдовательно

$$\frac{304}{683}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}.$$

Приближающіяся дроби будутъ:

$$\frac{1}{2},\qquad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}=\frac{4}{9},\qquad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{18}}}=\frac{73}{164},$$

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{1}}}}=\frac{77}{173}$$

а разности между двумя смежными

$$\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{2.9}=\frac{1}{18},\qquad \frac{73}{164}-\frac{4}{9}=\frac{1}{9.164}=\frac{1}{1476},$$

$$\frac{73}{164}-\frac{77}{173}=\frac{1}{164.173}=\frac{1}{28372}.$$

Когда данная для превращенія дробь будетъ неправильная, то сперва отдѣляютъ отъ нея цѣлое число, которое изобразитъ первое частное. Далѣе дѣйствіе производится по извѣстному правилу. Положимъ, напримѣръ, что требуется обратить десятичную дробь 3,14159 въ непрерывную (*). Такъ какъ

$$3{,}14159=\frac{314159}{100000},$$

то производя дѣйствіе обыкновеннымъ порядкомъ, получимъ

(*) Въ Геометріи будетъ показано, что дробь 3,14159 изображаетъ приближенное отношеніе окружности круга къ его діаметру.

```
100000 | 314159 | 3    1-е частное.
         300000
         ------
          14159 | 100000 | 7    2-е частное.
                   99113
                  ------
                     887 | 14159 | 15    3-е частное.
                            887
                           -----
                            5289
                            4435
                           -----
                             854 | 887 | 1    4-е частное.
                                  и проч.
```

При вычисленіи приближающихся дробей, первое частное, какъ замѣчено выше, пишется въ видѣ цѣлаго числа, а слѣдующія за нимъ войдутъ знаменателями въ составляющія дроби; и такъ, найдется:

$$3{,}14159 = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \text{и проч.}}}}$$

Приближающіяся дроби будутъ:

$$3 = \frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \text{и проч.}$$

Здѣсь оканчиваемъ общія правила для ариѳметическихъ дѣйствій надъ отвлеченными числами, какъ цѣлыми, такъ и дробными. Для ближайшаго же объясненія, какъ употреблять эти правила при рѣшеніи практическихъ вопросовъ, а равно и для упражненія учащихся въ численныхъ выкладкахъ, присовокупляемъ Отдѣлъ объ *именованныхъ числахъ*, составляющихъ предметъ *прикладной Ариѳметики*.

ОТДѢЛЪ VIII.

Именованныя числа.

§ 98. ***Именованнымъ числомъ*** называется такое, которое состоитъ изъ цѣлаго или дробнаго числа единицъ извѣстнаго ро-

да. Напримѣръ 6 дней, $5\frac{1}{2}$ часовъ, 3 версты и 25 сажень, 10 фунтовъ и $16\frac{3}{4}$ золотника (Смот. Предварительныя понятія).

Именованныя величины одного и того же рода раздѣляются на части, болѣе или менѣе значительныя; эти части имѣютъ особыя названія, и, смотря по цѣли, употребляются однѣ преимущественно предъ другими. Напримѣръ, для измѣренія разстоянія между предметами, или какой либо длины, имѣемъ разныя мѣры, какъ то: версту, сажень, аршинъ, футъ, вершокъ и проч. Хотя всѣ эти мѣры *одного рода* между собой, однакожъ употребляются не безразлично при разныхъ обстоятельствахъ. Такъ еслибъ желали узнать взаимное разстояніе двухъ городовъ, то спросили бы сколько *верстъ* отъ одного до другаго, а не спросили бы сколько сажень, а тѣмъ менѣе еще сколько аршинъ или вершковъ. Напротивъ того, еслибъ рѣчь шла о длинѣ незначительной, положимъ о кускѣ сукна, то мы смѣрили бы эту длину *аршиномъ;* слишкомъ большая мѣра была бы неудобна. Въ первомъ случаѣ неудобство произошло бы отъ того, что выражая разстояніе двухъ городовъ, напримѣръ въ *аршинахъ*, нашли бы число, которое, по значительности своей, не представляло бы намъ яснаго понятія объ этомъ разстояніи. Во второмъ случаѣ, еслибъ, мѣряя сукно, приняли *версту* за единицу, найденная длина изобразилась бы самою незначительною частью версты, то есть весьма малою дробью; такая мѣра очевидно была бы чрезвычайно сбивчива и совершенно неудобна. Что̀ сказано здѣсь о длинѣ, равно относится и ко всякой другой величинѣ, какъ то: къ вѣсу, времени, скорости и проч. Выборъ же приличной единицы для измѣренія или сравненія такого рода величинъ, при различныхъ обстоятельствахъ, зависитъ отъ на̀выка и отъ здраваго соображенія.

И такъ мы видимъ, что при разсматриваніи какихъ бы то

ни было однородныхъ величинъ, употребляются единицы различныя между собой по величинѣ и по названію. Напримѣръ, для измѣренія длины имѣемъ мили, версты, сажени, аршины, футы, вершки, дюймы и проч., и всѣ эти мѣры могутъ быть принимаемы за единицы. Всякое именованное число изображается посредствомъ нѣсколькихъ такихъ единицъ, которыя обыкновенно пишутся по порядку ихъ величинъ. Такъ, напримѣръ, въ числѣ 5 сажень 2 аршина 7 вершковъ, первая единица, *сажень*, больше второй, *аршина; аршинъ*, въ свою очередь, больше третей, *вершка*. Эти различныя единицы: *сажень*, *аршинъ*, *вершокъ* можно принимать за *разряды* даннаго именованнаго числа. Здѣсь разряды имѣютъ тò же значеніе, какъ и въ цѣлыхъ числахъ или десятичныхъ дробяхъ, но только они вообще не *десятичные*, да и къ тому жъ бòльшею частію перемѣнные.

Когда сравниваемъ между собою два разряда, то *высшій* будетъ относиться къ бòльшей единицѣ, а *нисшій*, къ мѐньшей. Такъ въ именованномъ числѣ 5 сажень и 2 аршина, 5 сажень будетъ числомъ *высшаго разряда* или *бòльшаго наименованія*, а 2 аршина числомъ *нисшаго разряда* или *мѐньшаго наименованія*.

Для сокращенія рѣчи, условимся также называть *несоставнымъ* именованное число объ одномъ разрядѣ. Такъ 5 сажень, или 7 дней, или 10 фунтовъ, будутъ всѣ *несоставныя именованныя числа*. Напротивъ того, *составнымъ числомъ* назовемъ такое, которое состоитъ изъ нѣсколькихъ разрядовъ, какъ напримѣръ: 5 саж. 2 арш. 7 верш.; 3 мѣс. 3 нед. 8 час. 6 минутъ.

Въ именованныхъ числахъ мы безпрестанно имѣемъ надобность разлагать числа высшихъ разрядовъ на нисшіе, и обратно: переходить отъ чиселъ нисшихъ разрядовъ къ высшимъ. Первое дѣйствіе называется *раздробленіемъ*, а второе,

превращеніемъ именованныхъ чиселъ. При различныхъ выкладкахъ, требующихъ употребленія именованныхъ чиселъ, необходимо знать взаимное *отношеніе* послѣдовательныхъ разрядовъ или подраздѣленій, то есть, сколько разъ нисшіе заключаются въ высшихъ. Для указанія этихъ отношеній составлены таблички (*); очень полезно, чтобъ учащіеся знали даже наизусть нѣкоторыя изъ нихъ, въ особенности главныя изъ тѣхъ, которыя относятся къ мѣрамъ, общеупотребительнымъ въ Россіи.

Раздробленіе и превращеніе именованныхъ чиселъ. Опредѣленіе общей наибольшей мѣры между двумя или нѣсколькими именованными величинами.

§ 99. Для *раздробленія* именованнаго числа извѣстнаго наименованія въ меньшее, должно прежде всего знать, сколько разъ единица нисшаго разряда содержится въ единицѣ высшаго; это число разъ назовемъ *отношеніемъ;* учащіеся найдутъ его, для употребительнѣйшихъ именованныхъ чиселъ, въ таблицахъ, о которыхъ мы упомянули въ концѣ предъидущаго §. Такъ напримѣръ, *отношеніе* одной *сажени* къ *аршину* есть отвлеченное число 3, и оно показываетъ, что сажень *втрое* болѣе аршина; *отношеніе* однѣхъ *сутокъ* къ *часу* есть 24, потому что сутки состоятъ изъ *двадцати четырехъ* часовъ, и такъ далѣе.

Когда требуется раздробить *несоставное* именованное число извѣстнаго разряда на единицы непосредственно нисшаго, то помножаемъ данное число на *отношеніе* единицъ этихъ двухъ разрядовъ. Такъ для раздробленія 5 *сажень* на *аршины*, помножаемъ число 5 на *отношеніе* 3, и получаемъ 5 саж = 15 арш. Если же желаемъ раздробить данный разрядъ на едини-

---

(*) Эти таблицы помѣщены вслѣдъ за IX Отдѣломъ.

цы нисшаго разряда, пропуская нѣсколько промежуточныхъ, то помножаемъ данное число на всѣ послѣдовательныя отношенія, пока не дойдемъ до единицъ требуемаго наименованія. Слѣдующій примѣръ объяснитъ это правило какъ нельзя лучше. Предложимъ себѣ привести 5 недѣль въ минуты. Для перехода чрезъ всѣ постепенныя подраздѣленія времени отъ недѣли до минуты, нужно принять въ расчётъ недѣли, сутки, часы и минуты. Поэтому разсуждаемъ такъ: отношеніе недѣли къ суткамъ изображается числомъ 7, ибо въ недѣлѣ 7 сутокъ; слѣдовательно въ 5 недѣляхъ будетъ 5 разъ 7 сутокъ, или 35 сутокъ. Чтобы привести это число сутокъ въ единицы непосредственно мѐньшаго наименованія, то есть въ часы, должно умножить 35 на отношеніе однѣхъ сутокъ къ часу, то есть на 24, и получится 35 сут. $=$ 35 $\times$ 24 час. $=$ 840 часамъ. Наконецъ, чтобъ раздробить 840 часовъ на минуты, помножаемъ 840 на 60, ибо часъ содержитъ 60 минутъ. Такимъ образомъ найдемъ, что въ 5 недѣляхъ заключается $840 \times 60 = 50400$ минутъ. Слѣдовательно, искомое число минутъ будетъ $50400 = 5 . 7 . 24 . 60$, то есть: оно равно данному числу 5, послѣдовательно умноженному на отношенія 7, 24 и 60 недѣли къ суткамъ, сутокъ къ часу, и часа къ минутѣ.

Для приведенія *составнаго* именованнаго числа, напримѣръ 10 пуд. 23 фунт. и 12 лот. въ извѣстный нисшій разрядъ, положимъ въ золотники, можно раздробить на золотники число каждаго наименованія порознь; сумма всѣхъ найденныхъ чиселъ изобразитъ искомый результатъ въ золотникахъ. Вотъ подробности вычисленія:

Такъ какъ пудъ содержитъ 40 фунтовъ, то

10 пуд. $=$ 10.40 фунт. $=$ 400 фунт.;

въ фунтѣ 32 лота, поэтому

400 фун. $=$ 400.32 лот. $=$ 12800 лот.;

въ лотѣ 3 золотника, слѣдовательно

$$12800 \text{ лот.} = 12800 \,.\, 3 \text{ золот.} = 38400 \text{ зотот.}$$

И такъ, 10 пуд. = 38400 золот.

Поступая точно такъ же съ 23 фунт. и 12 лот., получимъ

$$23 \text{ фун.} = 23 \,.\, 32 \text{ лот.} = 736 \text{ лот.} = 736 \,.\, 3 \text{ зол.} = 2208 \text{ зол.}$$

$$12 \text{ лот.} = 12 \,.\, 3 \text{ зол.} = 36 \text{ зол.}$$

Сложивъ найденныя три числа, найдется

10 пуд. = 38400 зол.
23 фун. = 2208 зол.
12 лот. = 36 зол.

Искомое число = 40644 золот.

Можно также, по мѣрѣ раздробленія высшихъ разрядовъ на нисшіе, придавать къ полученнымъ числамъ соотвѣтственные разряды данной именованной величины. Такъ въ приведенномъ сей-часъ примѣрѣ мы могли бы поступить слѣдующимъ образомъ: 10 пуд. = 10 . 40 фун. = 400 фун.; придавъ 23 фунта, заключающіеся въ данной именованной величинѣ, получимъ 423 фунта. Далѣе: 423 фун. = 423 . 32 лота = 13536 лот.; придавъ 12 лотовъ, найдется всего 13548 лот. = 13548 . 3 зол. = 40644 золотника.

Вотъ еще примѣръ: *сколько 25 рублей 63 копѣйки серебромъ, составятъ на ассигнаціи?*

Такъ какъ рубль серебромъ содержитъ въ себѣ $3\frac{1}{2}$ ассигнаціонныхъ, то *отношеніе*, или отвлеченное число, на которое должно помножить данное именованное число, будетъ $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$. И такъ, получимъ

$$25 \text{ р. С.} + 63 \text{ к. С.} = 25 \text{ р. С.} + \frac{63}{100} \text{ р. С.} = \frac{2563}{100} \text{ р. С.}$$

$$= \frac{2563}{100} \cdot \frac{7}{2} \text{ р. А.} = 89\frac{141}{200} \text{ руб. Асс.}$$

Чтобы найти, сколько копѣекъ составляетъ $\frac{141}{200}$ р. А., стоитъ только умножить эту дробь на 100; получится

$$\frac{141}{200} \text{ р. А.} = \frac{141}{2} \text{ к. А.} = 70\frac{1}{2} \text{ к. А.}$$

И такъ

$$25 \text{ р. С.} + 63 \text{ к. С.} = 89 \text{ р. А.} + 70\frac{1}{2} \text{ к. А.}$$

§ 100. Для *превращенія несоставнаго* именованнаго числа въ число непосредственно бо̀льшаго наименованія, напримѣръ 20-ти аршинъ въ сажени, должно раздѣлить 20 на *отношеніе* одной сажени къ одному аршину, то есть на отвлеченное число 3; такимъ образомъ найдемъ

$$20 \text{ арш.} = \frac{20}{3} \text{ саж.} = 6\frac{2}{3} \text{ саж.} = 6 \text{ саж.} + 2 \text{ арш.}$$

Точно такъ же должно поступать и при превращеніи именованнаго числа въ другое, какого ни есть высшаго разряда. Напримѣръ, требуется превратить 672 минуты въ части сутокъ. Превращаемъ сперва 672 минуты въ число ближайшаго бо̀льшаго наименованія, именно въ часы, раздѣляя 672 на отношеніе 60; получимъ 672 мин. $= \frac{672}{60}$ час.; чтобы превратить часы съ части сутокъ, должно раздѣлить число часовъ на отношеніе 24; поэтому найдется

$$672 \text{ мин.} = \frac{672}{60} \text{ час.} = \frac{672}{60.24} \text{ сут.} = \frac{3.7.32}{3.3.5.32} \text{ сут.} = \frac{7}{15} \text{ сутокъ.}$$

Когда данное именованное число будетъ *составное*, то, по показанному сей-часъ правилу, превращаемъ порознь каждую его часть въ требуемое бо̀льшее наименованіе; сумма найденныхъ чиселъ будетъ искомымъ результатомъ. Напримѣръ, ищемъ, какую часть пуда составляетъ $\frac{1}{2}$ пуда $+ 3\frac{2}{3}$ фунта $+ 22$ лота $+ \frac{3}{2}$ золотника. Для этого превративъ въ доли пуда данное число фунтовъ, лотовъ и золотниковъ по обыкновенному правилу, получимъ:

$$\frac{1}{2}\text{ пуда}$$

$$3\frac{2}{3}\text{ фун.} = \frac{3^2/_3}{40}\text{ пуд.} = \frac{11}{120}\text{ пуда}$$

$$22\text{ лот.} = \frac{22}{32}\text{ фун.} = \frac{22}{32.40}\text{ пуда}$$

$$\frac{3}{2}\text{ зол.} = \frac{3}{2.3}\text{ лот.} = \frac{1}{2}\text{ лот.} = \frac{1}{2.32}\text{ фун.} = \frac{1}{2.32.40}\text{ пуда.}$$

Сложивъ эти части пуда, найдемъ

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{11}{120} + \frac{22}{32.40} + \frac{1}{3.32.40}\right)\text{пуда,}$$

или, по приведенiи всѣхъ четырехъ дробей къ общему наимéньшему знаменателю $2.3.32.40 = 7680$, получимъ окончательно

$$\frac{1}{2}\text{п.} + 3\frac{2}{3}\text{ ф.} + 22\text{ л.} + \frac{3}{2}\text{ з.} = \frac{4679}{7680}\text{ пуда.}$$

Положимъ еще, что требуется узнать, *сколько* 125 р. А. + 83 к. А. *составятъ на серебро?*

Такъ какъ одинъ рубль серебромъ равняется $\frac{7}{2}$ ассигнацiоннаго рубля, то получимъ

$$125\text{ р. А.} + 83\text{ к. А.} = \frac{125 + \frac{83}{100}}{\frac{7}{2}}\text{ р. С.} = \frac{12583.2}{700}\text{ р. С.}$$

$$= 35\frac{666}{700}\text{ руб. Сер.}$$

Превращая $\frac{666}{700}$ р. С. въ копѣйки, найдется:

$$\frac{666}{700}\text{ р. С.} = \frac{666}{7}\text{ к. С.} = 95\frac{1}{7}\text{ к. С.}$$

И такъ

$$125\text{ р. А.} + 83\text{ к. А.} = 35\text{ р. С.} + 95\frac{1}{7}\text{ к. С.}$$

Замѣтимъ, что раздробленiе и превращенiе именованныхъ

чиселъ, а равно и всѣ другія дѣйствія надъ ними, становятся весьма простыми при десятичномъ раздѣленіи единицъ, ибо приводятся къ вычисленіямъ съ десятичными дробями. Такъ, напримѣръ, именованное число 26 рублей 7 гривенъ и 3 копѣйки, можно изобразить въ видѣ 26,73 рубля. Для раздробленія этого числа на *гривны*, стоитъ только подвинуть запятую вправо на одинъ знакъ, а для раздробленія на *копѣйки*, на два знака, въ слѣдствіе чего получимъ: 26,73 рубля = 267,3 гривны = 2673 копѣйкамъ. На-оборотъ, чтобы 2673 копѣйки превратить въ гривны и рубли, отдѣляемъ запятою влѣво одну и двѣ цифры, и получаемъ: 2673 коп. = 267,3 грив. = 26,73 рубля.

Въ новыхъ Французскихъ мѣрахъ всѣ подраздѣленія десятичныя, и это самое значительно облегчаетъ вычисленія при употребленіи этихъ мѣръ.

Есть еще раздѣленіе *шестидесятичное*, которое довольно часто употребляется. Въ этомъ раздѣленіи, отношеніе единицъ ближайшихъ наименованій равняется 60-ти. Такъ, въ Геометріи, подраздѣленія *градуса*, то есть 360-й части окружности круга, всѣ *шестидесятичныя*: градусъ содержитъ въ себѣ 60 минутъ, минута 60 секундъ, секунда 60 терцій. Подраздѣленія одного *часа* тѣ же самыя, и имѣютъ тѣ же названія. Преимущество шестидесятичнаго раздѣленія въ иныхъ случаяхъ состоитъ въ томъ, что число 60, сверхъ единицы и самого себя, имѣетъ много дѣлителей, именно: 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 и 30, что̀ часто ведетъ къ сокращенію дробей, встрѣчающихся въ вычисленіяхъ.

§ 101. Опредѣленіе *общей наибо̀льшей мѣры* между двумя именованными величинами не представляетъ никакого затрудненія. Для этого стоитъ только раздро̀бить обѣ величины на единицы одного и того же наимѐньшаго наименованія, и между найденными двумя числами найти общій наибо̀льшій дѣ-

литель, который изобразится въ единицахъ наимѐньшаго наименованія. Потомъ уже этому дѣлителю даемъ прилнчный видъ чрезъ превращеніе, то есть чрезъ отдѣленіе отъ него единицъ высшихъ разрядовъ. Примѣръ объяснитъ вполнѣ это дѣйствіе.

Найти общую наибольшую мѣру между 46 саж. + 1 арш. + 8 верш. и 98 саж. + 2 арш. + 7 вершковъ.

Раздробивъ 46 саж. + 1 арш. + 8 вер. на вершки, получимъ:

46 саж. = 46.3 арш. = 46.3.16 вер. = 2208 верш.
1 арш. = 1.16 верш. = 16 верш.
8 верш.

Всего: 2232 вершка.

Раздробивъ подобнымъ образомъ второе число 98 саж. + 2 ар. + 7 вер., получимъ:

98 саж. = 98.3 ар. = 98.3.16 вер. = 4704 верш.
2 ар. = 2.16 вер. = 32 верш.
7 верш.

Всего: 4743 вершка.

И такъ, вопросъ приводится къ опредѣленію общаго наибольшаго дѣлителя между двумя числами 4743 и 2232. Вотъ самое вычисленіе:

```
2232 | 4743 | 2
       4464
       ----
        279 |  2232 | 8
               2232
               ----
                 0.
```

Слѣдовательно, 279 будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ чиселъ 4743 и 2232, а поэтому 279 вершковъ есть *общая наибольшая мѣра* между 4743 вершками и 2232 вершками.

Превращая 279 верш. въ единицы бо̀льшаго наименованія, получимъ

$$279 \text{ вер.} = \frac{279}{16} \text{ ар.} = 17 \text{ ар.} + 7 \text{ вер.} = 5 \text{ саж.} + 2. \text{ ар.} + 7 \text{ вер.}$$

При трехъ, или бо̀льшемъ числѣ именованныхъ величинъ, общій наибо̀льшій ихъ дѣлитель опредѣляется сообразно съ сказаннымъ въ концѣ § 72.

Сложеніе и вычитаніе именованныхъ чиселъ.

§ 102. Прежде всего замѣтимъ, что какое бы дѣйствіе мы не желали произвести надъ именованными числами, ихъ должно писать всегда въ надлежащемъ порядкѣ, именно: начинать съ единицъ наибо̀льшаго разряда и оканчивать наимѐньшимъ. Для *сложенія* и *вычитанія* всѣ эти числа подписываются одни подъ другими, наблюдая чтобъ единицы одинаковаго наименованія находились въ одномъ столбцѣ. Потомъ, съ числами каждаго столбца, дѣйствуютъ по обыкновеннымъ правиламъ, начиная съ послѣдняго съ правой стороны, то есть, съ единицъ наимѐньшаго наименованія. Если при сложеніи окажется, что число единицъ извѣстнаго разряда будетъ заключать въ себѣ одну или нѣсколько единицъ непосредственно высшаго разряда, то отдѣляемъ эти единицы (§ 100), и придаемъ ихъ потомъ къ суммѣ чиселъ ближайшаго столбца съ лѣвой стороны. Также, если при вычитаніи, уменьшаемое число какого ни есть наименованія будетъ менѣе вычитаемаго того же разряда, то отдѣляемъ единицу отъ числа ближайшаго бо̀льшаго разряда; эту единицу раздробляемъ (§ 99), и, придавъ результатъ раздробленія къ уменьшаемому числу, производимъ вычитаніе. Изъ сказаннаго усматриваемъ, что въ сложеніи и вычитаніи, какъ данныя, такъ и искомыя, будутъ всегда именованными величинами одного и того же рода.

Найти сумму именованныхъ чиселъ:

3 пуд.	+ 23 фун.	+ 13 лот.	+ 2 зол.
6	+ 37	+ 25	»
8	»	+ 16	+ 1
»	+ 36	»	+ $2\frac{1}{2}$
Сумма: 19 пуд.	+ 17 фун.	+ 23 лот.	+ $2\frac{1}{2}$ зол.

Вычисленіе произведено слѣдующимъ образомъ: расположивъ слагаемыя въ надлежащемъ порядкѣ, говоримъ: $(2 + 1 + 2\frac{1}{2})$ зол. $= 5\frac{1}{2}$ зол. $= 1$ лот. $+ 2\frac{1}{2}$ зол.; пишемъ $2\frac{1}{2}$ въ столбцѣ золотниковъ, а 1 лотъ придаемъ къ числамъ слѣдующаго столбца. Далѣе: $13 + 25 + 16$ и удержанная $1 = 97$ фун. $= 2$ пуд. $+ 17$ фун.; пишемъ 17 въ столбцѣ фунтовъ, а 2 пуда придаемъ къ послѣднему столбцу съ лѣвой стороны, и получаемъ $3 + 6 + 8 + 2 = 19$ пудамъ. Вмѣсто 19 пудовъ, можно написать 1 берковецъ + 9 пудовъ, наблюдая что 10 пудовъ составляютъ 1 берковецъ.

Найти сумму именованныхъ чиселъ:

3 нед.	+ 6 сут.	+ 13 час.	+ 28 мин.	+ 53 сек.
2	+ 5	+ 5	»	+ 48
4	+ 3	+ 22	+ 56	»
1	+ 5	+ 18	+ 47	+ 35
Сумма: 13 нед.	»	+ 12 час.	+ 13 мин.	+ 16 сек.

Вотъ примѣры вычитанія:

Изъ	18 пуд.	+ 21 фун.	+ 7 лот.	+ 2 зол.
вычесть:	13	+ 29	+ 31	+ 1
Разность:	4 пуд.	+ 31 фун.	+ 8 лот.	+ 1 зол.

Говоримъ: 1 зол. изъ 2, 1; пишемъ 1 подъ золотниками; 31 изъ 7 вычесть нельзя: занимаемъ единицу непосредственно бо́льшаго наименованія, именно 1 фунтъ; въ фунтѣ 32 лота; и такъ $32 + 7 = 39$; 31 изъ 39, 8; пишемъ 8 подъ лотами.

Далѣе: 29 изъ 20 не вычитается; отдѣляемъ отъ 18 пудовъ 1 пудъ или 40 фунтовъ, и имѣемъ 40 + 20 = 60 фунтамъ; 29 изъ 60, 31; пишемъ это число подъ фунтами, а 13 пуд. вычитаемъ изъ 17 пуд., и находимъ 4 пуда, которые и пишемъ подъ пудами.

Въ слѣдующемъ примѣрѣ употребленъ аптекарскій вѣсъ:

Изъ 9 фун.

вычесть: 5 фун. + 9 унц. + 5 драх. + 2 скр.

Разность: 3 фун. + 2 унц. + 2 драх. + 1 скр.

Такъ какъ въ уменьшаемомъ именованномъ числѣ, именно въ 9 фун., нѣтъ разрядовъ ниже фунта, то отдѣляемъ отъ этого числа 1 фунтъ = 12 унціямъ; отъ 12 унцій отдѣляемъ 1 унцію = 8 драхмамъ; наконецъ, отъ 8 драхмъ отдѣляемъ 1 драхму = 3 скрупуламъ. Такимъ образомъ уменьшаемое число 9 фунт. приведется къ виду

8 ф. + 11 ун. + 7 др. + 3 ск.

вычтя: 5 ф. + 9 ун. + 5 др. + 2 ск.

получимъ: 3 ф. + 2 ун. + 2 др. + 1 ск.,

какъ написано выше.

Для *повѣрки* произведеннаго вычитанія, стоитъ только сложить вычитаемое съ разностію: сумма должна равняться уменьшаемому числу. Дѣйствительно, будетъ

5 ф. + 9 ун. + 5 др. + 2 ск.

3 + 2 + 2 + 1

Сумма: 9 ф. + 0 ун. + 0 др. + 0 ск.

Умноженіе именованныхъ чиселъ.

§ 103. ***Для умноженія именованнаго числа о сколькихъ угодно разрядахъ на отвлеченное число, помножаемъ всѣ разряды, начиная съ низшихъ, и отъ послѣдовательныхъ произ-***

веденій отдѣляемъ единицы непосредственно высшаго разряда (§ 100), *которыя и придаемъ къ слѣдующему произведенію.*

Такъ для умноженія 25 саж. + 1 арш. + 11 верш. на цѣлое число 7, поступаемъ слѣдующимъ образомъ:

25 саж. + 1 арш. + 11 верш.;
7

Произведеніе: 178 саж. + 2 арш. + 13 верш.,

то есть: умножаемъ 11 на 7, и получаемъ 77 вер. = 4 арш. + 13 вер.; 13 пишемъ въ столбцѣ вершковъ, а 4 арш. придаемъ къ слѣдующему произведенію, именно къ $1 \times 7 = 7$ ар.; $7 + 4 = 11$ ар. = 3 саж. + 2 ар.; пишемъ 2 ар., а 3 саж. придаемъ къ произведенію 25×7, и получаемъ, въ столбцѣ саженей, $25 \times 7 + 3$ или 178 сажень.

Часто случается, что множитель есть число цѣлое съ дробью, или просто дробь. Напримѣръ, требуется умножить 7 фун. + 29 лот. + 2 зол. на число $12\frac{2}{3}$; слѣдствіе умноженія будетъ

7 фун. + 29 лот. + 2 зол.
$12\frac{2}{3}$

Произведеніе: $99\frac{2}{3}$ фун. + $23\frac{1}{3}$ лот. + $1\frac{1}{3}$ зол.

Помножаемъ 2 на $12\frac{2}{3}$, и получаемъ $25\frac{1}{3}$ зол. = 8 лот. + $1\frac{1}{3}$ зол.; $1\frac{1}{3}$ пишемъ въ столбцѣ золотниковъ, а 8 лот. придаемъ къ слѣдующему произведенію, то есть къ $29 \times 12\frac{2}{3}$ лот. = $367\frac{1}{3}$ лот. = 11 фун. + $15\frac{1}{3}$ лот.; получимъ 11 фун. + $23\frac{1}{3}$ лот.; пишемъ $23\frac{1}{3}$ подъ лотами, а 11 фун. удерживаемъ въ умѣ. Наконецъ, $7 \times 12\frac{2}{3} = 88\frac{2}{3}$ фун. и 11 ф. въ умѣ, всего $99\frac{2}{3}$ ф., которые пишемъ подъ фунтами. Если пожелаемъ освободиться отъ дробей, находящихся при каждомъ разрядѣ произведенія, и отдѣлить отъ фунтовъ пуды, то поступая сообразно съ сказаннымъ въ §§ 99 и 100, получимъ:

$$99\frac{2}{3} \text{ фун.} = 2 \text{ пуд.} + 19\frac{2}{3} \text{фун.}$$

$$\frac{2}{3} \text{ фун.} = \frac{2}{3} \cdot 32 \text{ лот.} = 21\frac{1}{3} \text{ лот.}$$

Придавъ $21\frac{1}{3}$ лот. къ найденнымъ въ произведенiи $23\frac{1}{3}$ лот., получимъ

$$21\frac{1}{3} \text{ л.} + 23\frac{1}{3} \text{ л.} = 44\frac{2}{3} \text{ л.} = 1 \text{ ф.} + 12\frac{2}{3} \text{ л.}$$

И такъ

$$99\frac{2}{3} \text{ ф.} + 23\frac{1}{3} \text{ л.} = 2 \text{ пуд.} + 20 \text{ фун.} + 12\frac{2}{3} \text{ лот.}$$

Наконецъ, обративъ $\frac{2}{3}$ лота въ золотники чрезъ умноженiе на 3, найдется 2 золотника, и придавъ ихъ къ $1\frac{1}{3}$ зол. самаго произведенiя, получимъ 2 зол. $+ 1\frac{1}{3}$ зол. $= 3\frac{1}{3}$ зол. $= 1$ лот. $+ \frac{1}{3}$ зол. Поэтому будетъ

$$(7 \text{ ф.} + 29 \text{ л.} + 2 \text{з.}) \times 12\frac{2}{3} = 2 \text{п.} + 20 \text{ ф.} + 13 \text{ л.} + \frac{1}{3} \text{ з.}$$

Умноженiе именованныхъ чиселъ можетъ быть также произведено и слѣдующимъ образомъ: *множимое раздробляютъ на единицы наимѣньшаго, заключающагося въ предложенной величинѣ, наименованiя; полученное число этихъ единицъ помножаютъ на данный множитель, и потомъ произведенiю даютъ приличный видъ чрезъ послѣдовательное отдѣленiе высшихъ разрядовъ отъ найденнаго числа единицъ.*

Такъ въ предъидущемъ примѣрѣ раздробляемъ сперва данное именованное число на единицы нисшаго разряда, именно на золотники, и помножаемъ ихъ число на $12\frac{2}{3} = \frac{38}{3}$. Найденное такимъ образомъ произведенiе изобразитъ золотники; превративъ ихъ потомъ въ единицы высшихъ разрядовъ, получимъ искомый результатъ въ требуемомъ видѣ. Вотъ подробности этого вычисленiя:

$$7 \text{ ф.} = 7 . 32 \text{ л.} = 7 . 32 . 3 \text{ з.} = 672 \text{ зол.}$$

$$29 \text{ л.} = 29 . 3 \text{ з.} = 87 \text{ зол.}$$

$$2 \text{ зол.}$$

Всего: 761 зол.

Для умноженія на $12\frac{2}{3} = \frac{38}{3}$, должно умножить 761 на 38, и произведеніе раздѣлить на 3; получимъ

$$761 \times 12\frac{2}{3} \text{ зол.} = \frac{761 . 38}{3} \text{ зол.} = \frac{28918}{3} \text{ зол.} = 9639\frac{1}{3} \text{ зол.}$$

Удерживаемъ $\frac{1}{3}$ зол., а число 9639 обращаемъ въ лоты чрезъ раздѣленіе его на 3; найдемъ

$$9639 \text{ з.} = \frac{9639}{3} \text{ л.} = 3213 \text{ лот.}$$

Это число лотовъ приводимъ въ фунты раздѣляя его на 32; получимъ

$$3213 \text{ л.} = \frac{3213}{32} \text{ ф.} = 100 \text{ ф.} + 13 \text{ л.};$$

13 лот. удерживаемъ, а 100 фун. обращаемъ въ пуды чрезъ раздѣленіе на 40; будетъ

$$100 \text{ ф.} = 2 \text{ п.} + 20 \text{ ф.}$$

Присовокупляя къ этому именованному числу удержанные лоты и $\frac{1}{3}$ зол., получимъ, какъ и выше:

$$2 \text{ пуд.} + 20 \text{ фун.} + 13 \text{ лот.} + \frac{1}{3} \text{ зол..}$$

Иногда, по смыслу вопроса, множимое и множитель оба изображены именованными числами, какъ напримѣръ въ слѣдующей задачѣ:

Курьеръ въ однѣ сутки проѣзжаетъ** 43 **мили** 5 **верстъ и** 153 **сажени; спрашивается, сколько, при такой же ѣздѣ, онъ проѣдетъ милей, верстъ и сажень въ** 1 **недѣлю** 3-**е сутокъ и** 16 **часовъ?

Если бы, вмѣсто составнаго числа 1 нед. + 3 сут. + 16 час., имѣли цѣлое число сутокъ, напримѣръ, ровно 10 сутокъ, то для рѣшенія задачи разсуждали бы слѣдующимъ образомъ: курьеръ въ однѣ сутки проѣзжаетъ 43 мил. + 5 вер. + 153 саж.; поэтому, при такой же ѣздѣ, въ двое сутокъ онъ проѣдетъ *вдвое* болѣе, въ трое сутокъ, *втрое*, и такъ далѣе; слѣдовательно, въ десять сутокъ онъ проѣдетъ *въ десять разъ* болѣе чѣмъ въ однѣ сутки. Чтобъ узнать, сколько въ этомъ предположеніи проѣдетъ курьеръ, должно найти про-

изведеніе (43. м. + 5 в. + 153 саж.) × 10, которое будетъ равно 437 мил. + 4 вер. + 30 саженямъ. Замѣтимъ теперь, что множитель 10, при такомъ умноженіи, должно непремѣнно считать *числомъ отвлеченнымъ;* и дѣйствительно, онъ нисколько не перемѣнится, если, вмѣсто того чтобы принимать однѣ *сутки* за единицу времени, мы допустимъ всякую другую единицу времени, напримѣръ *недѣлю*, или *мѣсяцъ*, или иной промежутокъ времени. И такъ, мы могли бы сказать: *Курьеръ, въ нѣкоторую неизвѣстную намъ единицу времени, проѣзжаетъ* 43 м. + 5 в. + 153 с.; *сколько онъ проѣдетъ въ десять такихъ же единицъ времени?* Отвѣтъ очевидно остался бы точно такой, какъ еслибъ рѣчь шла о единицѣ, равной однѣмъ суткамъ. Повторяемъ, множитель всегда будетъ *числомъ отвлеченнымъ*, а произведеніе, числомъ именованнымъ, одного рода съ множимымъ.

Обращаемся къ предложенной выше задачѣ. Приведя 1 нед. + 3 сут. + 16 час. къ суткамъ, получимъ

$$1 \text{ нед.} = 7 \text{ сут.}, \qquad 16 \text{ час.} = \frac{16}{24} \text{ сут.} = \frac{2}{3} \text{ сут.};$$

слѣдовательно:

$$1 \text{ н.} + 3. \text{ с.} + 16 \text{ час.} = 10\frac{2}{3} \text{ сут.}$$

Но мы уже нашли выше, что въ 10 сутокъ курьеръ проѣдетъ 437 м. + 4 в. + 30 с.; поэтому остается только помножить 43 м. + 5 в. + 153 с. на $\frac{2}{3}$, и полученное произведеніе придать къ 437 м. + 4 в. + 30 с. Найдется:

$$(43 \text{ м.} + 5 \text{ в.} + 153 \text{ с.}) \times \frac{2}{3} = 29 \text{ м.} + 1 \text{ в.} + 102 \text{ с.}$$

придавъ къ этому 437 м. + 4 в. + 30 с.

получимъ: 466 м. + 5 в. + 132 с.

И такъ, въ 1 нед. + 3 сут. + 16 час. курьеръ проѣдетъ 466 милей 5 верстъ и 132 сажени.

Замѣтимъ, что иногда смыслъ задачи, по видимому, противорѣчитъ правилу, по которому множитель должно всегда принимать за число отвлеченное, а произведеніе, за число именованное, одного рода съ множимымъ. Такъ, напримѣръ, еслибъ требовалось найти, сколько содержится квадратныхъ аршинъ въ продолговатой четыреугольной комнатѣ, имѣющей въ ширину 2 саж. $+ 1\frac{1}{2}$ арш. $= 7\frac{1}{2}$ арш., а въ длину 4 саж. $+$ 2 ар. $=$ 14 арш., то для рѣшенія этой задачи надлежало бы, какъ говорится въ Геометріи, *помножить ширину на длину*, или найти произведеніе $7\frac{1}{2}$ арш. на 14 аршинъ. Результатомъ этого умноженія будетъ $14 \times 7\frac{1}{2} = 105$ *квадратныхъ аршинъ*, то есть число именованное, не одного рода съ множимымъ. Здѣсь, собственно говоря, должно разсматривать оба множителя какъ числа отвлеченныя; произведеніе же ихъ, по смыслу самой задачи, будетъ заключать столько отвлеченныхъ единицъ, сколько въ комнатѣ содержится квадратныхъ аршинъ. Или еще, въ этой самой задачѣ, можно принять число 14 за *именованное*, и разумѣть подъ нимъ совокупность 14 *квадратныхъ аршинъ;* тогда множитель $7\frac{1}{2}$ будетъ число *отвлеченное*, а произведеніе 105 изобразитъ *квадратные аршины*, что̀ сообразно съ правиломъ, въ слѣдствіе котораго произведеніе бываетъ всегда одного рода съ множимымъ. Эти замѣчанія получатъ возможную степень очевидности при пособіи чертежа, состоящаго изъ четыреугольной фигуры, разложенной на квадраты, число которыхъ опредѣлится условіями рѣшаемой задачи. Въ подобномъ смыслѣ должно понимать и произведеніе трехъ множителей, получаемое, какъ говорится въ Геометріи, отъ *перемноженія ширины на длину и высоту*. Это произведеніе выражается въ *кубическихъ единицахъ*. Подъ *кубическою единицею* разумѣемъ единичную мѣру, употребляемую для измѣренія какого либо *объёма* или *вмѣстимости*. Такъ, напримѣръ, принимая вмѣстимость ведра за *кубичес-*

кую единицу, говоримъ, что бочка содержитъ въ себѣ 40 такихъ единицъ (*).

Дѣленіе именованныхъ чиселъ.

§ 104. Когда дѣлимое *несоставное* именованное число, а дѣлитель число отвлеченное, то дѣленіе производится обыкновеннымъ образомъ, и частное очевидно будетъ одного наименованія съ дѣлимымъ. Напримѣръ, еслибъ требовалось раздѣлить 5 пудовъ на $13\frac{3}{4}$, то получили бы

$$\frac{5 \text{ пуд.}}{13\frac{3}{4}} = \frac{4.5}{55} \text{ пуд.} = \frac{4}{11} \text{ пуда.}$$

Раздробляя $\frac{4}{11}$ пуда на нисшіе разряды, имѣемъ:

$$\frac{4}{11} \text{ пуд.} = \frac{4.40}{11} \text{ фун.} = 14\frac{6}{11} \text{ фун.}$$
$$\frac{6}{11} \text{ фун.} = \frac{6.32}{11} \text{ лот.} = 17\frac{5}{11} \text{ лот.}$$
$$\frac{5}{11} \text{ лот.} = \frac{5.3}{11} \text{ зол.} = 1\frac{4}{11} \text{ зол.}$$

И такъ

$$\frac{5 \text{ пуд.}}{13\frac{3}{4}} = 14 \text{ фун.} + 17 \text{ лот.} + 1\frac{4}{11} \text{ зол.}$$

При *составномъ* дѣлимомъ поступаемъ точно такъ же со всѣми его частями, начиная съ бо́льшихъ наименованій, и раздробляя каждый остатокъ на единицы непосредственно нисшаго разряда, которыя и придаемъ къ слѣдующему частному. Для примѣра, раздѣлимъ 6 нед. + 5 сут. + 22 час. на отвлеченное число $4\frac{2}{7}$. Вотъ подробности этого вычисленія:

$$\frac{6 \text{ нед.}}{4\frac{2}{7}} = \frac{42}{30} \text{ нед.} = 1\frac{2}{5} \text{ нед.}$$

$$\frac{2}{5} \text{ нед.} = \frac{2.7}{5} \text{ сут.} = 2\frac{4}{5} \text{ сут.}$$

(*) Дальнѣйшія подробности объ этомъ предметѣ должны быть отнесены къ Геометріи.

Дѣлимъ теперь на $4\frac{2}{7}$ вторую часть дѣлимаго, то есть 5 сут., и къ частному придаемъ $2\frac{4}{5}$ сут.; получимъ

$$\frac{5 \text{ сут.}}{4\frac{2}{7}} + 2\frac{4}{5} \text{ сут.} = 3\frac{29}{30} \text{ сут.};$$

раздробивъ $\frac{29}{30}$ сут. на часы, будетъ

$$\frac{29}{30} \text{ сут.} = \frac{29.24}{30} \text{ час.} = 23\frac{1}{5} \text{ час.}$$

Наконецъ, 22 часа дѣлимъ на $4\frac{2}{7}$, и къ частному придаемъ $23\frac{1}{5}$ часа; получимъ

$$\frac{22 \text{ ч.}}{4\frac{2}{7}} + 23\frac{1}{5} \text{ ч.} = 28\frac{1}{3} \text{ ч.} = 1 \text{ сут.} + 4\frac{1}{3} \text{ час.}$$

Совокупляя въ одно именованное число найденныя части, выйдетъ

$$\frac{6 \text{ нед.} + 5 \text{ сут.} + 22 \text{ час.}}{4\frac{2}{7}} = 1 \text{ нед.} + 4 \text{ сут.} + 4\frac{1}{3} \text{ час.}$$

или 1 н. + 4 с. + 4 ч. + 20 м.

Для *повѣрки* этого результата, стоитъ только умножить частное 1 н. + 4 с. + $4\frac{1}{3}$ ч. на $4\frac{2}{7}$; если, въ найденномъ произведеніи, превратимъ дроби въ приличныя именованныя единицы, то дѣйствительно получимъ дѣлимое 6 нед. + 5 сут. + 22 часа.

Можно также, для раздѣленія составной именованной величины на отвлеченное число, сперва раздробить её на единицы наимѐньшаго наименованія, и это число единицъ раздѣлить на данный дѣлитель; потомъ, найденное частное привести къ надлежащему виду чрезъ превращеніе. Такъ въ предъидущемъ примѣрѣ раздробляемъ данную именованную величину 6 нед. + 5 сут. + 22 час. на часы, и получаемъ

$$6 \text{ нед.} + 5 \text{ сут.} + 22 \text{ час.} = 1150 \text{ час.}$$

Раздѣливъ это число на $4\frac{2}{7}=\frac{30}{7}$, найдемъ

$$\frac{1150}{\frac{30}{7}}=\frac{1150.7}{30}=268\frac{1}{3}\text{ час.},$$

и наконецъ, чрезъ превращеніе,

$$268\frac{1}{3}\text{ час.} = 1\text{ нед.} + 4\text{ сут.} + 4\frac{1}{3}\text{ час.}$$

Когда дѣлитель есть цѣлое число, то дѣленіе упрощается, и, для удобности, можетъ быть расположено въ видѣ обыкновеннаго дѣленія. Вотъ примѣръ:

Раздѣлить по–ровну 13 пуд. + 8 фун. + 2 лот. + 2 зол. *извѣстнаго товара между* 8-ю *человѣками.*

```
8 | 13 пуд.+8 фун.+2 лот.+2 зол. | 1 п.+26 ф.+0 л.+1 з.
    8
   ---
    5 пуд.
  ×40
   ---
   200 фун.
   +8 фун.
   ---
   208 фун.
   208
   ---
     0  2 лот.
       ×3
       ---
        6 зол.
       +2 зол.
       ---
        8 зол.
       +8
       ---
        0.
```

Дѣленіе произведено здѣсь слѣдующимъ образомъ: 8 въ 13,

1 разъ; пишу въ частномъ 1 пудъ; 8 изъ 13, 5, и какъ 8 въ 5 не содержится, то раздробляю 5 пудовъ на фунты чрезъ умноженіе этого числа на 40. Далѣе: $5 \times 40 = 200$ фун., къ которымъ сношу 8 фун. дѣлимаго, и получаю 208 фун.; 8 въ 208, ровно 26 разъ; пишу 26 ф. въ частномъ числѣ, и вычтя изъ 208 произведеніе $8 \times 26 = 208$, получаю въ остаткѣ 0; сношу 2 лота; 8 въ 2 не содержится: пишу 0 лот. въ частномъ. Раздробляю 2 лота на золотники умноживъ это число на 3, и придаю къ произведенію $2 \times 3 = 6$ находящіеся въ дѣлимомъ 2 зол.; получаю 8 зол.; 8 въ 8, 1 разъ, пишу 1 зол. въ частномъ числѣ, и какъ 8 изъ 8, 0, то дѣйствіе кончено. И такъ, на человѣка придется по 1 пуд. + 26 фун. + 1 зол.

Иногда данныя вопроса таковы, что дѣлимое и дѣлитель, оба, изображены именованными числами, которыя могутъ быть или *одного рода*, или *разныхъ родовъ*. Въ обоихъ случаяхъ дѣлитель принимается за *число отвлеченное*. Что касается до частнаго, то оно будетъ отвлеченнымъ числомъ, когда дѣлимое и дѣлитель, въ предложенномъ вопросѣ, *однородны* между собой, и, напротивъ того, именованнымъ одного рода съ дѣлимымъ, когда дѣлимое *не одного рода* съ дѣлителемъ. Слѣдующіе два примѣра покажутъ самымъ яснымъ образомъ различіе между этими двумя случаями: *спрашивается, во сколько разъ* 13 *аршинъ и* 1 *вершокъ болѣе* 2 *аршинъ* 6 *вершковъ*? Такъ какъ

13 ар. + 1 вер. = 209 вер., а 2 ар. + 6 вер. = 38 вер.,

то вопросъ приводится къ тому, чтобъ узнать, во сколько разъ 209 верш. болѣе 38 верш., или, иначе, сколько разъ 38 верш. могутъ быть вычтены изъ 209 вершковъ. Очевидно, что искомое число вычитаній изобразится отвлеченнымъ числомъ, которое будетъ не иное что̀, какъ частное, полученное отъ раздѣленія 209 на 38. При такомъ дѣйствіи мы не имѣемъ на-

добности принимать въ расчётъ *родъ* единицъ, изображенныхъ числами 209 и 38; будемъ ли имѣть 209 сажень и 38 сажень, или 209 фунтовъ и 38 фунтовъ, результатъ нисколько отъ этого не перемѣнится. Въ силу такой независимости вычисленія отъ рода единицъ, и сообразно съ сказаннымъ въ § 7, заключаемъ, что дѣлимое 209 и дѣлитель 38, которые произошли отъ раздробленія двухъ данныхъ именованныхъ чиселъ 13 ар. + 1 вер. и 2 ар. + 6 вер., должны быть оба разсматриваемы какъ *числа отвлеченныя*, а также и самый результатъ дѣленія, равный $\frac{209}{38} = 5\frac{1}{2}$. Въ этомъ примѣрѣ дѣлимое и дѣлитель были *однородныя* именованныя величины, и вотъ почему мы нашли для частнаго отвлеченное число $5\frac{1}{2}$, показывающее, что 2 ар. + 6 вер. содержатся *пять съ половиною разъ* въ 13 арш. + 1 вершкѣ.

Предложимъ теперь задачу, въ которой дѣлимое и дѣлитель изображены *разнородными* именованными числами. *Требуется узнать цѣну одного аршина сукна, когда извѣстно, что за* 23 арш. + 8 верш. *заплачено* 286 руб. + 70 коп. Для рѣшенія задачи изображаемъ 23 ар. + 8 вер. въ частяхъ аршина, что̀ доставитъ

$$23 \text{ арш.} + 8 \text{ вер.} = 23 \text{ арш.} + \frac{8}{16} \text{ арш.} = \frac{47}{2} \text{ арш.},$$

и дѣлимъ потомъ 286 руб. + 70 коп. на эту дробь $\frac{47}{2}$, принимая ее за отвлеченное число. Такимъ образомъ получимъ

$$\frac{286 \text{ р.} + 70 \text{ к.}}{\frac{47}{2}} = \frac{(286 \text{ р.} + 70 \text{ к.}) \times 2}{47} = \frac{573 \text{ р.} + 40 \text{ к.}}{47}.$$

Означенное дѣленіе совершается какъ нельзя проще; вотъ подробности вычисленія:

$$
\begin{array}{r|l}
47 & 573 \text{ р.} + 40 \text{ к.} \mid 12 \text{ р.} + 20 \text{ к.} \\
 & 47 \\ \hline
 & 103 \\
 & 94 \\ \hline
 & 9 \text{ руб.} \\
 & \times 100 \\ \hline
 & 900 \text{ коп.} \\
 & +40 \text{ коп.} \\ \hline
 & 940 \text{ коп.} \\
 & 940 \\ \hline
 & 0.
\end{array}
$$

Итакъ, за одинъ аршинъ заплачено 12 руб. + 20 коп.

Мы сказали, что хотя дѣлитель $\frac{47}{2}$ арш. = 23 арш. + 8 вер. и выражается въ задачѣ именованнымъ числомъ, но онъ непремѣнно долженъ быть разсматриваемъ какъ отвлеченное число; это очевидно потому, что рѣшеніе задачи нисколько бы не перемѣнилось, еслибъ въ ней сказано было, что на сумму 286 р. + 70 к. куплено сукна $\frac{47}{2}$ *фута* или $\frac{47}{2}$ *метра*, или $\frac{47}{2}$ всякой другой единичной мѣры не только длины, но даже *вѣса* и проч., вмѣсто *аршина*. Поэтому дѣлитель, не завися ни отъ какой именованной величины, долженъ быть отвлеченнымъ числомъ. Сдѣланное замѣчаніе равно относится ко всѣмъ подобнымъ задачамъ: дѣлитель будетъ всегда числомъ отвлеченнымъ, а частное, числомъ именованнымъ, одного рода съ дѣлимымъ.

Вотъ еще примѣръ для упражненія: *за нѣкоторое вещество, аптек. вѣсомъ* 2. ф. + 7 унц. + 5 др. + 2 скр., *заплачено* 22 р. + 83 к.; *спрашивается, во сколько обходится одинъ скрупулъ этого вещества?*

Раздробивъ вѣсъ вещества на скрупулы, получимъ

$$
\begin{array}{rl}
2\text{ ф.} = 2.12\text{ унц.} = 2.12.8\text{ др.} = 2.12.8.3\text{ скр.} & = 576\text{ скр.} \\
7\text{ унц.} = 7.8\text{ др.} = 7.\ 8.\ 3\text{ скр.} & = 168\text{ скр.} \\
5\text{ др.} = 5.\ 3\text{ скр.} & = 15\text{ скр.} \\
 & 2\text{ скр.} \\
\hline
2\text{ ф.} + 7\text{ ун.} + 5\text{ др.} + 2\text{ скр.} & = 761\text{ скр.}
\end{array}
$$

И такъ, 761 скр. стоилъ 22 р. + 83 к. = 2283 копѣйки. Очевидно, что для полученія цѣны одного скрупула въ копѣйкахъ, должно раздѣлить 2283 коп. на отвлеченное число 761; получимъ

$$\frac{2283}{761}\text{ коп.} = 3\text{ коп.}$$

Припоминая сказанное о дѣйствіяхъ надъ именованными числами, мы усматриваемъ, что въ *сложеніи* и *вычитаніи* данныя и искомыя будутъ всегда именованными числами одного и того же рода. Въ *умноженіи*, умножаемое и произведеніе суть именованныя числа одного рода, а множитель, число отвлеченное. Въ *дѣленіи* представляются три случая: 1) Когда дѣлитель, по самому смыслу вопроса, есть число отвлеченное; въ этомъ предположеніи частное будетъ именованнымъ числомъ, одного рода съ дѣлимымъ. 2) Когда дѣлимое и дѣлитель изображены *однородными* именованными числами, то частное будетъ отвлеченнымъ числомъ. 3) Когда дѣлимое и дѣлитель *разнородныя* величины, то частное число будетъ именованное, одного рода съ дѣлимымъ. Дѣлитель же, во всѣхъ случаяхъ, принимается за отвлеченное число.

Примѣчаніе. Основныя дѣйствія надъ именованными числами очень употребительны при рѣшеніи многихъ практическихъ задачъ. Почти всѣ вопросы (за исключеніемъ задачъ, требующихъ извлеченія квадратнаго корня), которые обыкновенно относятъ къ *тройному правилу*, *простому* и *сложному*, въ различныхъ его видахъ, рѣшаются посредствомъ *умноженія* и *дѣленія* именованныхъ чиселъ. Для упражненія учащихся, по-

мѣщаемъ здѣсь нѣсколько подобныхъ задачъ, съ указаніемъ на самые пріёмы ихъ рѣшенія.

Задачи

для упражненія въ смѣшанныхъ дѣйствіяхъ надъ именованными числами.

§ 105. Задача 1-ая. *Въ пять различныхъ сроковъ принято желѣза на вѣсъ въ слѣдующемъ количествѣ: въ 1-ый разъ:* 15 *берк.* + 5 *пуд.* + $33\frac{1}{2}$ *фун.*; *во 2-ой:* 6 *б.* + 3 *п.* + $6\frac{1}{4}$ *ф.; въ 3-ій:* 8 *п.* + $36\frac{1}{3}$ *ф.; въ 4-ый:* 22 *б.* + 3 *п.* + 7 *ф.*; *наконецъ въ 5-ый:* 19 *б.* + 10 *п.* + $28\frac{1}{2}$ *ф. Изъ этого количества употреблено на одну работу* 26 *б.* + 8 *п.* + $15\frac{1}{2}$*ф.*, *а на другую* 16 *б.* + 7 *п.* + $23\frac{2}{3}$ *ф. Спрашивается, сколько осталось желѣза?*

Если изъ полнаго количества принятаго желѣза вычтемъ употребленное на обѣ работы, то получимъ искомый результатъ. Такимъ образомъ найдемъ:

Принято желѣза:	65 бер. + 1 пуд. + $31\frac{7}{12}$ фун.
Употреблено въ дѣло:	43 бер. + 5 пуд. + $39\frac{1}{6}$ фун.
Осталось:	21 бер. + 5 пуд. + $32\frac{5}{12}$ фун.

Задача 2-ая. ***По размежеваніи одной пустоши, содержащей*** 50 ***десятинъ и*** 543 ***квадратныя сажени, между тремя владѣльцами, на долю перваго досталось*** 13 ***дес.*** + 1683 ***кв. саж.*** + 7 ***кв. ар., а на долю втораго*** 28 ***дес.*** + 2196 ***кв. саж.*** + 8 ***кв. ар. Какъ великъ участокъ третьяго владѣльца? Отвѣтъ:*** 7 ***дес.*** + 1462 ***кв. саж.*** + 3 ***кв. арш.***

Задача 3-я. ***Въ Лабораторіи должно отлить*** 200 ***тысячь свинцовыхъ ружейныхъ пуль. Извѣстно, что пуля, среднимъ числомъ, вѣситъ*** 5 ***золотниковъ и*** 56 ***долей, а угаръ (убыль металла отъ плавки) на каждую пулю составляетъ***

$11\frac{1}{2}$ *долей. Спрашивается, сколько нужно свинца для отливки требуемыхъ 200 тысячь пуль?*

Очевидно, что по причинѣ угара, на каждую пулю пойдетъ свинца

$$5 \text{ зол.} + 56 \text{ дол.} + 11\frac{1}{2} \text{ дол.} = 547\frac{1}{2} \text{ дол.},$$

а слѣдовательно на 200 тысячь пуль

$$200000 \times 547\frac{1}{2} \text{ долей} = 109500000 \text{ дол.}$$

Обращая это число въ единицы высшихъ наименованій, получимъ

$$109500000 \text{ дол.} = 297 \text{ пуд.} + 1 \text{ фун.} + 49 \text{ зол.}$$

Задача 4–ая. *Объёмъ полупудовой мѣдной мортиры равенъ* 669,19, *кубич. дюйм. Опредѣлить ея вѣсъ, зная* 1^0 *что артиллерійскій металлъ вѣситъ* 8,6 *разъ болѣе равнаго съ нимъ объёма воды;* 2^0 *что вѣсъ куб. дюйма воды равенъ* 3,84, *золотника.*

Для рѣшенія этой задачи, стоитъ только найти вѣсъ одного куб. дюйма артиллерійскаго металла, и потомъ эту именованную величину помножить на число 669,19, принимая его за отвлеченное. Такимъ образомъ получимъ

$$\text{Вѣсъ куб. дюйма артил. металла} = 8,6 \times 3,84 \text{ зол.} = 33,024 \text{ зол.}$$

Слѣдовательно

$$\text{Вѣсъ мортиры} = 669,19 \times 33,024 \text{ зол.} = 22099,33056 \text{ зол.}$$

Превративъ цѣлое число золотниковъ 22099 въ единицы высшихъ наименованій, найдется

$$\text{Вѣсъ мортиры} = 5 \text{ пуд.} + 30 \text{ фун.} + 19,33056 \text{ зол.}$$

Задача 5-ая. *Опредѣлить на обыкновенныхъ часахъ тѣ дѣленія, на которыхъ минутная стрѣлка покрываетъ часовую.*

Примемъ 12 час. за первое соединеніе стрѣлокъ; второе произойдетъ во 2-мъ часу, третье въ 3-мъ часу и такъ далѣе. Для

опредѣленія времени втораго соединенія, вообразимъ, что часы показываютъ ровно *часъ;* въ это мгновеніе, разстояніе между двумя стрѣлками будетъ равно 5 минутамъ; послѣ того минутная стрѣлка, которой ходъ въ 12 разъ быстрѣе хода часовой, станетъ догонять послѣднюю, и настигнетъ её между дѣленіями 1 ч. и 2 ч. Соединеніе очевидно произойдетъ въ тò мгновеніе, когда перейденное часовою стрѣлкою разстояніе, считаемое отъ дѣленія 1 ч., составитъ $\frac{1}{12}$ долю разстоянія, считаемаго отъ 12 ч., или, что̀ всё равно, $\frac{1}{11}$ долю 5 минутъ. И такъ, минутная стрѣлка покроетъ часовую во второй разъ, когда часы будутъ показывать 1 часъ и $5\frac{5}{11}$ минутъ. Далѣе, минутная стрѣлка опередитъ часовую, и снова возвратится на дѣленіе 12 ч.; тогда будетъ ровно *два часа*. Разсуждая какъ выше, увидимъ, что разстояніе отъ 12 ч. до 2 ч., соотвѣтствующее 10 мин., въ 11 разъ болѣе разстоянія, переходимаго часовою стрѣлкою, считая отъ 2 ч. до того мгновенія, когда минутная покроетъ её въ третій разъ. Слѣдовательно, третье соединеніе произойдетъ въ 2 час. и $10\frac{10}{11}$ мин. Точно такъ же найдутся и всѣ послѣдующія соединенія стрѣлокъ, именно: 4–е въ 3 ч. $+ 16\frac{4}{11}$ м.; 5-е въ 4 ч. $+ 21\frac{9}{11}$ м.; 6-е въ 5 ч. $+ 27\frac{3}{11}$ м. и такъ далѣе, прибавляя каждый разъ по 1 ч. $+ 5\frac{5}{11}$ м. Одинадцатое, и вмѣстѣ съ тѣмъ послѣднее соединеніе стрѣлокъ въ продолженіи полусутокъ, произойдетъ въ 10 ч. $+ 54\frac{6}{11}$ м.

Задача 6-ая. *На кораблѣ заготовлено 46 пудъ + 14 фунтовъ + 12 лотовъ сухарей для экипажа, состоящаго изъ 23 матросовъ. На человѣка выдается въ день по 1 ф. + 76 з. Спрашивается, на сколько дней достанетъ заготовленныхъ сухарей? Отвѣтъ: на 45 дней или на 6 нед. + 3 дня.*

Задача 7-ая. *Бассейнъ наполняется водою посредствомъ трехъ равныхъ отверстій въ 1 день + 8 час. + 25 мин. + 15 сек. Во сколько времени онъ наполнится, когда вода будетъ притекать изъ пяти такихъ же отверстій?*

Если, при *трехъ* отверстіяхъ, бассейнъ наполняется водою въ извѣстный промежутокъ времени, то очевидно, что при *одномъ* отверстіи, нужно будетъ *втрое* болѣе времени. И такъ, при *одномъ* отверстіи, потребуется

$$(1 \text{ д.} + 8 \text{ ч.} + 25 \text{ м.} + 15 \text{ с.}) \times 3 = 4 \text{ д.} + 1 \text{ ч.} + 15 \text{ м.} + 45 \text{ с.}$$

Теперь, чтобъ получить время наполненія бассейна при *пяти* отверстіяхъ, стоитъ только предъидущую именованную величину раздѣлить на 5, и получимъ окончательно

$$\frac{4 \text{ д.} + 1 \text{ ч.} + 15 \text{ м.} + 45 \text{ с.}}{5} = 19 \text{ ч.} + 27 \text{ м.} + 9 \text{ с.}$$

Задача 8-ая. *14 поденьщиковъ работая въ день по 10 часовъ, вырыли въ 9 дней канаву длиною въ 84 сажени. Спрашивается, сколько нужно поденьщиковъ, чтобы въ 13 дней окончить канаву въ 190 саж. 2 арш., предполагая, что нанятые люди работаютъ по 11 часовъ въ день?*

Для рѣшенія этой задачи, или другой, одного съ нею рода, надобно прежде всего опредѣлить, по *извѣстному* условію вопроса, *единичную работу* поденьщика. Подъ *единичною работою*, въ настоящемъ случаѣ, должно разумѣть длину канавы, выраженную въ саженяхъ или иначе, которую *одинъ* поденьщикъ выроетъ въ *одинъ* день, работая въ день *одинъ* часъ. Для опредѣленія этой единичной работы, дѣлимъ сперва 84 на 14, и получаемъ работу *одного* поденьщика въ теченіи 9 дней и 10 рабочихъ часовъ. Потомъ, частное $\frac{84}{14} = 6$ саж., дѣлимъ на число 9, и получаемъ работу *одного* поденьщика въ теченіи *одного* дня, при 10 рабочихъ часахъ. Наконецъ, раздѣляя частное $\frac{6}{9}$ саж. $= 2$ арш. на 10, находимъ искомую *единичную работу*, которая будетъ равна $\frac{2}{10}$ арш. $= \frac{1}{5}$ аршина.

Послѣ этого, искомое число поденьщиковъ опредѣлится какъ нельзя проще, руководствуясь слѣдующимъ сужденіемъ: если 190 саж. + 2 арш. канавы должны быть вырыты въ 13 дней,

считая по 11 рабочихъ часовъ, то въ *одинъ* день, при *одномъ* рабочемъ часѣ, должно окончить $\frac{190\text{ с.} + 2\text{ ар.}}{13 \times 11} = 4$ арш. Но найдено выше, что *одинъ* поденьщикъ вырываетъ въ *одинъ* часъ $\frac{1}{5}$ арш.; поэтому, искомое число людей во столько разъ больше единицы, во сколько 4 болѣе $\frac{1}{5}$, то есть равно частному $4 : \frac{1}{5} = 20$. И такъ, искомое число поденьщиковъ будетъ 20.

Задача 9-ая. *Извѣстно, что 3 аршина равняются 7 футамъ, 3 фута одному англійскому ярду, а 2,18726 англ. ярда 2 метрамъ. Сколько 10 аршинъ составятъ метровъ?*

Такъ какъ отношеніе *ярда* къ *метру* можетъ быть выведено непосредственно изъ данныхъ вопроса, то стоитъ только найти отношеніе *аршина* къ *ярду*, чтобы потомъ опредѣлить сколько одинъ аршинъ, а слѣдовательно и 10, составляютъ метровъ.

Но 3 аршина равняются 7 футамъ, почему 1 арш. $= \frac{7}{3}$ фута; далѣе: 3 фута $= 1$ ярду, откуда 1 футъ $= \frac{1}{3}$ ярда. Слѣдовательно 1 арш. $= \frac{7}{3} \times \frac{1}{3}$ ярда. Но какъ съ другой стороны 2,18726 ярда $= 2$ метрамъ, то получимъ

$$1 \text{ ярдъ} = \frac{2}{2{,}18726} \text{ метра,}$$

откуда

$$1 \text{ арш.} = \frac{7}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2{,}18726} \text{ метра.}$$

Наконецъ, умноживъ на 10, найдемъ

$$10 \text{ арш.} = \frac{7 \times 10 \times 2}{3 \times 3 \times 2{,}18726} \text{ метра} = 7{,}111\ldots \text{метра.}$$

Задача 10-ая. *Продаются двѣ партіи полотна одинаковой доброты; первая состоитъ изъ 20 кусковъ, по 50 аршинъ въ каждомъ, а ширина полотна 1 арш. 4 вершка; вторая, изъ 30 кусковъ, по 45 аршинъ, ширина полотна 1 арш. 2 вершка. Первую партію продаютъ за 350 рублей серебромъ; на вторую же дѣлаютъ уступку, именно 6 процентовъ. Спрашивается, во сколько обойдется на ассигнаціи вторая партія полотна?*

Чтобы рѣшить вопросъ, вычислимъ сперва настоящую цѣну второй партіи, основываясь на томъ, что первая стоитъ 350 рублей серебромъ; потомъ, изъ этой настоящей цѣны, вычтемъ $\frac{6}{100}$ ея долю. Найденная разность изобразитъ искомую сумму на серебро, которую уже легко перевести на ассигнаціи.

Для опредѣленія настоящей цѣны второй партіи, вычислимъ, сколько заключается въ ней *квадратныхъ аршинъ* полотна; сообразно съ сказаннымъ въ концѣ § 103, искомое число квадратныхъ аршинъ получится помноживъ длину полотна 30×45 арш. $=1350$ арш. на его ширину 1 арш. $+$ 2 вер. $= 1\frac{1}{8}$ аршина. Такимъ образомъ найдемъ

$$1350 \times 1\frac{1}{8} = 1518\frac{3}{4} \text{ квадр. арш.}$$

Точно такъ же вычислимъ и число квадратныхъ аршинъ полотна въ первой партіи; оно будетъ

$$20 \times 50 \times 1\frac{1}{4} = 1250 \text{ квадр. арш.}$$

Такъ какъ за эти 1250 кв. ар. требуютъ 350 рублей серебромъ, то цѣна одного квадратнаго аршина получится въ частяхъ рубля раздѣливъ 350 на 1250, и поэтому будетъ

$$\frac{350 \text{ р. с.}}{1250} = \frac{7}{25} \text{ р. с.}$$

Слѣдовательно, настоящая цѣна второй партіи полотна равна

$$1518\frac{3}{4} \times \frac{7}{25} \text{ р. с.} = 425{,}25 \text{ руб. сер.}$$

Но какъ по условію вопроса, отъ этой суммы слѣдуетъ отнять $\frac{6}{100}$ ея часть, то скидка опредѣлится произведеніемъ

$$425{,}25 \times \frac{6}{100} \text{ р. с.} = 25{,}515 \text{ руб. сер.,}$$

и цѣна второй партіи полотна, за вычетомъ этой уступки, будетъ

$$425{,}25 \text{ р. с.} - 25{,}515 \text{ р. с.} = 399{,}735 \text{ руб. сер.}$$

Для приведенія найденной суммы въ ассигнаціонные рубли, помножаемъ её на $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$, и получаемъ окончательно

$$\frac{7}{2} \times 399,735 \text{ р. с.} = 1399,1225 \text{ руб. асс.},$$

или, съ округленіемъ, 400 руб. сер. = 1400 руб. ассигн.

Задача 11-ая. *Трубки для картечныхъ гранатъ отливаются изъ свинца съ прибавленіемъ* 10 *процентовъ олова. Трубка вѣситъ* 85 *золотниковъ; угаръ полагается на свинецъ* 0,018, *а на олово* 0,022 *всего употребленнаго металла. Спрашивается, сколько нужно свинца и олова для отливки* 240 *трубокъ?*

Опредѣлимъ количество свинца и олова, потребное для отливки одной трубки, не принимая сперва въ расчётъ угара. Такъ какъ трубка отливается изъ свинца и 10-й части олова, то ясно, что изъ 11 частей смѣси, потребуется 10 частей свинца и 1 часть олова; слѣдовательно, раздѣливъ вѣсъ трубки, то есть 85 золот. на 11, найдется количество олова, которое поэтому будетъ $\frac{85}{11}$ зол. $= 7\frac{8}{11}$ зол. Остальныя же 10 частей, именно $10 \times \frac{85}{11}$ зол. $= 77\frac{3}{11}$ зол., изобразятъ количество свинца.

Примемъ теперь въ расчётъ убыль металла отъ плавки. Угаръ на свинецъ полагается 0,018, то есть 18 на 1000, или, иначе: изъ 1000 какихъ ни есть частей свинца, напримѣръ золотниковъ, останется, послѣ плавки, только $1000-18=982$ золотника; слѣдовательно, чтобы получить въ дѣлѣ *одинъ* золотникъ свинца, надобно употребить 982-ю часть 1000 золотниковъ, или $\frac{1000}{982}$ зол. Поэтому, принимая въ расчётъ угаръ свинца, для отливки одной трубки потребуется этого металла $77\frac{3}{11} \times \frac{1000}{982}$ зол., а для отливки 240 трубокъ, въ 240 разъ больше. И такъ

$$\text{Свинца потребуется:} \quad 240 \times 77\frac{3}{11} \times \frac{1000}{982} \text{ зол.}$$

$$= 4 \text{ пуд.} + 36 \text{ фун.} + 69\frac{2115}{11.491} \text{ зол.}$$

Совершенно подобнымъ образомъ найдется и количество олова. Такъ какъ угаръ на этотъ металлъ полагается 0,022, то

есть 22 на 1000, то и заключаемъ, что изъ 1000 золотниковъ останется, послѣ плавки, только $1000-22=978$ зол. Слѣдовательно, чтобы получить *одинъ* золотникъ олова, должно употребить $\frac{1000}{978}$ зол.; поэтому, на одну трубку пойдетъ олова $7\frac{8}{11}\times\frac{1000}{978}$ зол., а на всѣ 240 трубокъ

Олова потребуется: $240\times 7\frac{8}{11}\times\frac{1000}{978}$ зол.

$=19$ фун. $+\ 72\frac{472}{11.163}$ зол.

Задача 12-ая. *Порохъ составляется изъ* 30 *частей (по вѣсу) селитры,* 6 *частей угля и* 4 *частей сѣры. Опредѣлить, сколько потребуется каждаго изъ этихъ трехъ веществъ для приготовленія* 10 *тысячь пудовъ пороха, полагая утрату отъ раструски и распышки: въ селитрѣ по* 1 *золотнику, въ сѣрѣ по* $1\frac{1}{2}$ *зол., а въ углѣ, по* 5 *зол. на пудъ.*

Опредѣлимъ, сколько потребовалось бы каждаго изъ трехъ поименованныхъ веществъ для изготовленія 10 тысячь пудовъ пороха, еслибъ не принимали въ расчётъ ихъ утраты. Такъ какъ, по условію вопроса, 40 какихъ ни есть частей пороху (по вѣсу) состоятъ изъ 30 такихъ же частей селитры, 6-ти угля и 4-хъ сѣры, то раздѣливъ требуемые 10 тысячь пудовъ на 40, получимъ: $\frac{10 \text{ тыс. пуд.}}{40}=250$ пудамъ. Слѣдовательно, не принимая въ расчётъ утраты,

Селитры потребуется: 30×250 пуд. $=7500$ пуд.
Угля: . . . . 6×250 пуд. $=1500$ пуд.
Сѣры: . . . . 4×250 пуд. $=1000$ пуд.

Вычислимъ теперь настоящее количество селитры, которое слѣдуетъ употребить для полученія требуемыхъ 7500 пудовъ. Такъ какъ на каждый пудъ, составляющій $40\times 96=3840$ золотниковъ, теряется отъ раструски 1 золот., то поэтому отъ пуда селитры останется $(3840-1)$ зол. $=3839$ золот.; слѣдовательно, 1 пудъ селитры получится изъ $\frac{3840}{3839}$ пуд., а 7500 пуд. изъ $7500\times\frac{3840}{3839}$ пуд. И такъ

Селитры потребуется: $7500 \times \frac{3840}{3839}$ пуд. $= 7501\frac{3661}{3839}$ пуд.

$= 7501$ пуд. $+ 38$ фун. $+ 13\frac{3661}{3839}$ зол.

Точно такимъ образомъ найдемъ, что

Угля потребуется: $1500 \times \frac{3840}{3838\frac{1}{2}}$ пуд. $= 1500\frac{500}{853}$ пуд.

$= 1500$ пуд. $+ 23$ фун. $+ 42\frac{750}{853}$ зол.

Сѣры потребуется: $1000 \times \frac{3840}{3835}$ пуд. $= 1001\frac{233}{767}$ пуд.

$= 1001$ пуд. $+ 12$ фун. $+ 14\frac{398}{767}$ зол.

ОТДѢЛЪ IX.

Прибавленія.

Римскія цифры. Славянскія письмена для счисленія. Понятіе о различныхъ системахъ счисленія, какъ то: о діадической, додекадической и проч.

§ 106. Числительные знаки, бывшіе въ употребленіи у Римлянъ, состояли изъ *семи* Латинскихъ буквъ

I, V, X, L, C, D, M,

которымъ приписывали слѣдующія соотвѣтственныя значенія:

1, 5, 10, 50 100, 500, 1000.

Такъ какъ *Римскія цифры* употребляются и теперь въ нѣкоторыхъ случаяхъ, то полезно знать ихъ счисленіе. Для полной вразумительности этого предмета, достаточно замѣтить, что основаніе Римскаго счисленія есть *сложеніе* и *вычитаніе*. Когда, *по правую сторону* буквы извѣстнаго значенія, стоитъ буква равнаго, или меньшаго значенія, то этимъ означается *сложеніе*. Такъ XXVI изображаетъ число 26, потому что имѣемъ: 1) двѣ одинаковыя буквы X и X; 2) букву V=5 по правую сторону буквы X=10, а V<X, и 3) букву I=1, по правую же сторону буквы V=5, при чёмъ I<V. Слѣдовательно будетъ X+X+V+I=26. Напротивъ того, когда *по лѣвую сто-*

рону буквы извѣстнаго значенія, стоитъ буква мѐньшаго значенія, то этимъ означается *вычитаніе*. Такъ XCIV изображаетъ число 94. И дѣйствительно, съ лѣвой стороны имѣемъ цифру X=10, то есть букву мѐньшаго значенія противъ C =100, почему и будетъ XC=C—X=100—10=90; равнымъ образомъ, I<V, почему IV=V—I=5—1=4. И такъ XCIV всё равно что

C—X+V—I=100—10+5—1=94.

Соображаясь съ этими условіями, очень легко будетъ ознакомиться съ *Римскимъ счисленіемъ*, которое приведено въ слѣдующей таблицѣ:

Арабское счисленіе:	Римскія прописныя:	Римскія строчныя:	Арабское счисленіе:	Римскія прописныя:	Римскія строчныя:
1	I	j	120	CXX	cxx
2	II	ij	121	CXXI	cxxj
3	III	iij	200	CC	cc
4	IV	iv	300	CCC	ccc
5	V	v	400	CCCC	cccc или
6	VI	vj		или IV^{c}.	iv^{c}.
7	VII	vij	500	D	d
8	VIII	viij	600	DC или	dc или
9	IX	ix		VI^{c}.	vj^{c}.
10	X	x	700	DCC или	dcc или
11	XI	xj		VII^{c}.	vij^{c}.
12	XII	xij	800	DCCC	dccc
20	XX	xx	900	DCCCC	dcccc
30	XXX	xxx	1000	M	m
40	XL	xl	1100	MC	mc
50	L	l	1200	MCC	mcc
60	LX	lx	1300	MCCC	mccc
70	LXX	lxx	1400	MCCCC	mcccc
80	LXXX	lxxx	1500	MD	md
90	XC	xc	2000	MM	mm
100	C	c	10000	X^{m}.	x^{m}
101	CI	cj	100000	C^{m}.	c^{m}.

§ 107. Въ нашихъ церковныхъ книгахъ, въ лѣтописяхъ и вообще въ древнихъ памятникахъ отечественной письменности, употребляются, для счисленія, буквы Славянскаго алфавита. Основаніемъ *Славянскому счисленію* служитъ одно *сложеніе*, какъ можно видѣть изъ слѣдующей таблички:

Араб.	Слав.	Араб.	Слав.	Араб.	Слав.	Араб.	Слав.	Араб.	Слав.	Араб.	Слав.
1	а	8	и	21	ка	60	ѯ	120	рк	700	ѱ
2	в	9	ѳ	22	кв	70	о	121	рка	800	ѡ
3	г	10	і	23	кг	80	п	200	с	900	ц
4	д	11	аі	30	л	90	ч	300	т	1000	҂а
5	є	12	ві	31	ла	100	р	400	ȣ	2000	҂в
6	ѕ	13	гі	40	м	101	ра	500	ф	3000	҂г
7	з	20	к	50	н	111	раі	600	х	1849	҂аѡмѳ

Впрочемъ, эти письмена чаще пишутся подъ титломъ, въ видѣ: а҃, в҃, г҃, р҃а, р҃аі и проч.

§ 108. Приведемъ теперь главныя понятія о различныхъ системахъ счисленія. И во первыхъ замѣтимъ, что употребленіе *десяти* числительныхъ знаковъ нисколько не касается сущности счисленія, и что можно бы было принять ихъ болѣе или менѣе, по произволенію. Причина же введенія и всеобщаго распространенія *десятичной* Ариѳметики, преимущественно предъ другими, по всей вѣроятности состояла въ томъ, что первоначально всѣ считали ***по пальцамъ на обѣихъ рукахъ.***

Подобно тому, какъ рядъ

$$1,\quad 10,\quad 10^2,\quad 10^3,\quad 10^4\ldots.$$

служитъ основаніемъ десятичному счисленію, разсматриваніе новыхъ рядовъ

$$1,\quad 2,\quad 2^2,\quad 2^3,\quad 2^4\ldots.$$

$$1,\quad 3,\quad 3^2,\quad 3^3,\quad 3^4\ldots.$$

и проч.

приведетъ къ заключенію, что всякое число можетъ быть изображено посредствомъ *двухъ* знаковъ, положимъ 0 и 1, посредствомъ *трехъ* знаковъ, напримѣръ 0, 1 и 2, и такъ далѣе. При этомъ числа, возвышаемыя въ послѣдовательныя степени, называются *основаніями* соотвѣтственныхъ имъ системъ счисленія. И такъ, 10 есть *основаніе десятичной* нумераціи; 2, *основаніе двойничной* (двухъ-цифренной) или *діадической*, употребляющей два знака; 3, *основаніе тройничной* (трехъ-цифренной), употребляющей три знака, и такъ далѣе. Для совершенной вразумительности этихъ общихъ объясненій, разсмотримъ, напримѣръ, систему *діадическую.*

Мы знаемъ, что въ *десятичномъ счисленіи* всякая цифра получаетъ значеніе въ 10 въ $10 \times 10 = 100$, въ $100 \times 10 = 1000$.... разъ бо̀льшее противъ первоначальнаго, когда переносимъ её влѣво на одно, два, три... мѣста; подобнымъ образомъ можно условиться, что въ *діадическомъ счисленіи*, *единица* на второмъ мѣстѣ (считая отъ правой руки къ лѣвой), изображаетъ *два*, на третьемъ *четыре*, на четвертомъ *восемь*, однимъ словомъ, что значеніе ея становится *вдвое* болѣе при переходѣ къ ближайшему мѣсту съ лѣвой стороны. На такомъ основаніи легко изобразить всѣ послѣдовательныя цѣлыя числа *одинъ*, *два*, *три*, *четыре*, *пять* и проч., которыя пишутся слѣдующимъ образомъ: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010 и такъ далѣе.

Переходъ отъ десятичной системы къ діадической, и обратно, очень простъ. Положимъ, требуется выразить число 29 (двадцать девять) по діадической системѣ. Дѣлимъ 29 на 2, получаемъ частное 14 и остатокъ 1. Этотъ остатокъ будетъ первая искомая цифра съ правой стороны. Потомъ, найденное частное 14 дѣлимъ опять на 2, получаемъ новое частное 7 и остатокъ 0, который займетъ въ діадическомъ числѣ второе мѣсто, считая по прежнему отъ правой руки къ лѣвой. Раздѣлимъ 7 на 2; найдемъ частное 3 и остатокъ 1; дѣлимъ 3 на 2-получаемъ частное 1 и остатокъ 1. Далѣе дѣленіе невозможно,

и частное 1 пишется на послѣднемъ мѣстѣ. И такъ, *двадцать девять* изобразится по діадической системѣ такъ: 11101.

Изъ того что всякое число можетъ быть изображено по діадической системѣ, прямо слѣдуетъ одно примѣчательное ея свойство, а именно: возможность взвѣшивать грузы, состоящіе изъ какого ни есть цѣлаго числа единицъ вѣса, напримѣръ фунтовъ, употребляя для взвѣшиванія по одной только гирѣ въ 1 фунтъ, въ 2 ф., въ 4 ф., въ 8 ф., въ 16 ф. и такъ далѣе.

Для перехода отъ діадической системы къ десятичной, достаточно имѣть таблицу послѣдовательныхъ степеней числа *два*. Потомъ уже, искомое число получится посредствомъ простаго сложенія. Напримѣръ, чтобъ найти значеніе діадическаго числа 11101 по десятичной системѣ, пишемъ

по діадической				по десятичной
1		=	1	
100	$= 2^2$	=	4	
1000	$= 2^3$	=	8	
10000	$= 2^4$	=	16	
		Сумма	29	по десятичной.

Сложеніе и вычитаніе по діадической Ариѳметикѣ производятся очень просто, какъ усматриваемъ изъ слѣдующихъ двухъ примѣровъ:

Примѣръ сложенія:

1100110 = 102
110111 = 55
101111 = 47
10111101 = 189

Сумма: 110001001 = 393.

Примѣръ вычитанія:

1 1·1·0·0·0 1 0 1 0 1 1·0·1 = 14508
1 0 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 = 2827

Разность: 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 1 = 11681.

Относительно умноженія и дѣленія чиселъ, выраженныхъ по системѣ діадической, можно замѣтить, что первое дѣйствіе все-

гда приводится къ сложенію простыхъ единицъ, а второе, къ простѣйшему случаю вычитанія, именно 0 изъ 1 и 1 изъ 1 и 2. Эти свойства непосредственно слѣдуютъ изъ того что въ этой системѣ употребляется только одна значущая цифра 1. Вотъ примѣры:

Примѣръ умноженія:

```
     1101 = 13
     1011 = 11
     ----
     1101
    1101
   1101
  --------
  10001111 = 143.
```

Примѣръ дѣленія:

```
135 = 10000111 | 1001 = 9
      1001     |-----
      ----     | 1111 = 15
       1111
       1001
       ----
        1101
        1001
        ----
         1001
         1001
         ----
           0.
```

Діадическая система, имѣющая нѣкоторыя теоретическія преимущества предъ другими, неудобна на практикѣ по причинѣ значительнаго числа знаковъ, требуемыхъ ею для изображенія чиселъ, даже посредственной величины. Такъ напримѣръ, число *тысяча*, вмѣсто *четырехъ* цифръ, требовало бы *десяти* цифръ. И въ самомъ дѣлѣ, *одна тысяча*, по діадической Ариѳметикѣ, выражается чрезъ 1111101000.

Сказанное здѣсь о діадической системѣ счисленія, можно примѣнить и ко всякой другой. Возьмемъ еще для примѣра *додекадическую* или *двѣнадцати-цифренную* систему, которая, при малочисленности употребляемыхъ въ ней знаковъ, имѣетъ тò преимущество, что основаніе ея, число *двѣнадцать*, дѣ-

лится на̀-цѣло на 2, на 3, на 4 и на 6, а это самое даетъ возможность изображать конечными додекадическими дробями встрѣчающіяся довольно часто подраздѣленія $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ главной единицы.

Сообразно съ объясненнымъ выше о системахъ счисленія вообще, рядъ

$$1,\quad 12,\quad 12^2 = 144,\quad 12^3 = 1728,\quad 12^4 = 20736 \text{ и проч.}$$

будетъ служить основаніемъ двѣнадцатеричной Ариѳметикѣ; поэтому, *единица* на *второмъ* мѣстѣ (считая отъ правой руки къ лѣвой), изобразитъ *двѣнадцать*, на *третьемъ*, *сто сорокъ четыре*, на *четвертомъ*, *тысячу семь сотъ двадцать восемь* и такъ далѣе.

Для изображенія первыхъ девяти чиселъ по додекадической системѣ, можно удержать цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9; но для означенія *десяти* и *одинадцати*, должно ввести новые знаки. Пусть *десять* = *a*, *одинадцать* = *b*; сверхъ того, сохранимъ 0 (*нуль*), который, какъ и въ десятичной Ариѳметикѣ, будемъ употреблять для означенія мѣстъ недостающихъ разрядовъ. При такихъ условіяхъ, послѣдовательныя числа изобразятся по двѣнадцатеричной системѣ слѣдующимъ образомъ:

По двѣнадцатеричной системѣ:		По десятичной системѣ:	По двѣнадцатеричной системѣ:		По десятичной системѣ:
1	=	1	1*a*	=	22
2	=	2	1*b*	=	23
3	=	3	20	=	24
. . .		. . .	. . .		. . .
9	=	9	26	=	30
a	=	10	34	=	40
b	=	11	42	=	50
10	=	12	. . .		. . .
11	=	13	84	=	100
12	=	14	100	=	144
. . .		. . .	6*b*4	=	1000
18	=	20	1000	=	1728
19	=	21	и проч.		

Что касается до перехода отъ десятичной системы къ двѣнадцатеричной, то этотъ вопросъ рѣшается точно такъ, какъ объяснено выше для діадической системы; только, вмѣсто дѣлителя *два*, слѣдуетъ употребить дѣлитель *двѣнадцать*, и, при полученіи остатка, равнаго *десяти* или *одинадцати*, писать *a* или *b*. Положимъ, напримѣръ, требуется выразить десятичное число 3370 двѣнадцатеричнымъ; дѣлимъ 3370 на 12, получаемъ частное 280 и остатокъ $10=a$; этотъ остатокъ *a* будетъ *первая* искомая цифра съ правой стороны. Потомъ, найденное частное 280 дѣлимъ опять на 12, получаемъ новое частное 23 и остатокъ 4, который изобразитъ *вторую* цифру двѣнадцатеричнаго числа. Подобнымъ образомъ найдемъ, что *третья* цифра есть $11=b$, а *четвертая*, и вмѣстѣ съ тѣмъ послѣдняя, 1. И такъ, десятичное число 3370 изобразится, по додекадической системѣ, чрезъ 1*b*4*a*.

Для перехода отъ двѣнадцатеричной системы къ десятичной, надобно предварительно составить таблицу послѣдовательныхъ степеней числа *двѣнадцать*; потомъ уже, чрезъ простое сложеніе, получимъ число, которое имѣли въ виду изобразить по десятичной системѣ. Такъ для обращенія двѣнадцатеричнаго числа 3*ab*7*a* въ десятичное, пишемъ

По двѣнадцатеричной.				По десятичной.
a	$=$	10		
70	$=$	7.12	$=$	84
$b00$	$=$	11.12^2	$=$	1584
$a000$	$=$	10.12^3	$=$	17280
30000	$=$	3.12^4	$=$	62208

Сумма: 81166 по десятичной.

Для упражненія, приводимъ четыре примѣра основныхъ ариѳметическихъ дѣйствій по системѣ двѣнадцатеричной.

Примѣръ сложенія:

```
a123574ab
 6787787a
 123567a1
 ba5ab1a2
  178bab1
---------
b90528a21
```

Примѣръ вычитанія:

$$\begin{array}{r} 1\cdot4\cdot0\cdot0\,b\cdot5\,a\cdot6\cdot3 \\ 9\,a\,b\,0\,6\,3\,9\,a \\ \hline 6\,1\,1\,a\,b\,6\,8\,5 \end{array}$$

Примѣръ умноженія:

$$\begin{array}{r} 73a0b6a \\ 8a3b \\ \hline 6862a732 \\ 19b62a86 \\ 61249784 \\ 4a687868 \\ \hline 54a38681792 \end{array}$$

Примѣръ дѣленія:

$$\begin{array}{r|l} 72b930a8b & 36a70b \\ 71921a & \overline{2041} \\ \hline 12712a8 & \\ 1236438 & \\ \hline 36a70b & \\ 36a70b & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Мы уже упомянули выше о преимуществѣ додекадической системы предъ десятичною относительно удобства изображенія нѣкоторыхъ долей единицы. Въ самомъ дѣлѣ, изъ числа простыхъ подраздѣленій $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ и такъ далѣе, положимъ до $\frac{1}{12}$, только *три*, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{10}$, изображаются *однимъ* знакомъ посредствомъ десятичныхъ дробей, и соотвѣтственно равны 0, 5, 0, 2 и 0, 1; между тѣмъ, обративъ въ дроби додекадическія эти самыя подраздѣленія, находимъ, что *пять* изъ нихъ выражаются *однимъ* знакомъ, а именно: $\frac{1}{2} = 0,6$, $\frac{1}{3} = 0,4$, $\frac{1}{4} = 0,3$, $\frac{1}{6} = 0,2$, и $\frac{1}{12} = 0,1$. Замѣтимъ также, что изъ этихъ пяти дробей, *три*, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{12}$, приводятъ къ безконечнымъ деся-

тичнымъ дробямъ, а изъ трехъ дробей $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{10}$, только *двѣ*, $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{10}$, даютъ безконечныя додекадическія дроби. Сказанное здѣсь равно относится и къ другимъ подраздѣленіямъ единицы, приводящимъ къ какому ни есть числу знаковъ въ десятичныхъ и додекадическихъ дробяхъ. Въ особенности преимущество послѣднихъ неоспоримо при *шестидесятичномъ* раздѣленіи времени и окружности круга. Такъ, напримѣръ, принимая *часъ* за единицу времени, промежутки 5, 10, 15 и проч. минутъ выразятся соотвѣтственно безконечными десятичными дробями 0,08333..., 0,16666..., 0,24999..., а по додекадической системѣ, слѣдующими конечными: 0,1, 0,2, 0,3.... Подобнымъ образомъ дуги 35° 15′ 25″, 46° 10′ 50″, принимая *градусъ* за единицу, выражаются, по десятичной системѣ, безконечными десятичными дробями 35°,2569444..., 46°,1805555...., а по додекадической, слѣдующими конечными: 26°,31 и 3*a*°,22, которыя, безъ сомнѣнія, проще первыхъ.

Впрочемъ, замѣненіе нынѣ употребляемой Ариѳметики всякою другою, какъ бы новая не была выгодна, можно считать невозможнымъ уже потому что десятичное счисленіе, изустное и письменное, укоренилось своею давностію и повсемѣстнымъ распространеніемъ. Да и къ тому жъ, съ введеніемъ новой системы, пришлось бы совершенно измѣнить всѣ книги и таблицы, составленныя по десятичной системѣ, а этотъ трудъ, не говоря уже о другихъ препятствіяхъ, по объёму своему, почти неисполнимъ.

Повѣрка основныхъ ариѳметическихъ дѣйствій помощію остатковъ дѣленія. Повѣрка числомъ 9. Нѣкоторыя подробности о признакахъ дѣлимости чиселъ.

§ 109. Въ статьѣ о дѣлимости чиселъ (Отдѣлъ IV, § 67) было показано, что когда данное цѣлое число разложено на части,

и каждая изъ нихъ дѣлится на извѣстный дѣлитель, то и предложенное число будетъ дѣлиться на него безъ остатка. Тамъ же замѣчено, что *когда данное цѣлое число разложено на двѣ части, изъ которыхъ одна дѣлится на извѣстный дѣлитель, а другая даетъ нѣкоторый остатокъ, то и предложенное число, по раздѣленіи на этотъ дѣлитель, дастъ тотъ же самый остатокъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ какое угодно число, напримѣръ 23, разложенное на части 12 и 11; пусть данный дѣлитель будетъ 6; первая часть 12 дѣлится на него нà-цѣло, а вторая, 11, даетъ остатокъ 5. Напишемъ эти двѣ части рядомъ, отдѣливъ ихъ чертою

$$\overbrace{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1}^{12}\ \Big|\ \overbrace{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1}^{11}$$

Совокупность написанныхъ единицъ изобразитъ данное число 23; для раздѣленія его на 6, мы можемъ отдѣлять по 6-ти единицъ отъ лѣвой руки къ правой. Такимъ образомъ вторая черта упадетъ на прежнюю черту, отдѣляющую первую часть отъ второй, и слѣдовательно третья отдѣлитъ тотъ же остатокъ 5 для даннаго числа, какъ и для второй его части.

На этомъ свойствѣ легко основать способъ, служащій для повѣрки четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій, а именно:

Повѣрка сложенія. Принимая въ разсмотрѣніе какой ни есть дѣлитель, ищемъ, какіе остатки произойдутъ отъ каждаго слагаемаго. Сложивъ всѣ эти остатки, отдѣляемъ отъ ихъ суммы всѣ кратныя дѣлителя, чрезъ что̀ получится опять остатокъ (иногда нуль), который назовемъ *окончательнымъ*. Для вѣрности сложенія, остатокъ, происшедшій отъ раздѣленія суммы слагаемыхъ на принятый дѣлитель, долженъ равняться окончательному.

Повѣрка вычитанія. Для повѣрки вычитанія стоитъ толь-

ко принять вычитаемое число и разность за слагаемыя, а уменьшаемое, за ихъ сумму, и потомъ поступать, какъ сей-часъ было объяснено для сложенія.

Повѣрка умноженія. Найдемъ остатки дѣленія на разсматриваемый дѣлитель какъ для множимаго, такъ и для множителя; перемноживъ между собою эти два остатка, и откинувъ въ произведеніи ихъ всѣ кратныя дѣлителя, служащаго для повѣрки, получится окончательный остатокъ. Для вѣрности умноженія, произведеніе двухъ данныхъ чиселъ должно давать этотъ самый остатокъ.

Повѣрка дѣленія. Когда, при дѣленіи одного числа на другое, нѣтъ остатка, то для повѣрки дѣйствія слѣдуетъ поступать точно такъ какъ въ умноженіи, принявъ дѣлитель и частное число за множители, а дѣлимое, за произведеніе. Если же при дѣленіи получится остатокъ, то должно придать этотъ остатокъ, уменьшенный всѣми кратными употребляемаго для повѣрки дѣлителя, къ произведенію остатковъ дѣлителя и частнаго; откинувъ опять въ этой суммѣ всѣ кратныя принятаго дѣлителя, получится окончательный остатокъ. Для вѣрности дѣйствія, остатокъ дѣленія дѣлимаго на употребленный для повѣрки дѣлитель, долженъ быть равенъ окончательному остатку.

Для примѣненія предложенныхъ общихъ правилъ въ частности къ дѣлителямъ 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и проч., стоитъ только воспользоваться признаками дѣлимости на эти числа, выведенными въ §§ 70 и 71. Въ особенности просты и удобны пріёмы для повѣрки числомъ 9; поэтому мы и приведемъ ихъ здѣсь съ надлежащими объясненіями.

Въ § 70 мы видѣли, что остатокъ дѣленія какого ни есть числа на 9 одинаковъ съ остаткомъ, который получается отъ раздѣленія на 9 *суммы цифръ* даннаго числа. Основываясь на этомъ свойствѣ, и соображаясь притомъ съ сказаннымъ вы-

ше о повѣркахъ посредствомъ остатковъ дѣленія вообще, мы будемъ приведены къ слѣдующимъ заключеніямъ:

Повѣрка сложенія. Принимая въ слагаемыхъ числахъ всѣ цифры за простыя единицы, складываемъ ихъ, и, по мѣрѣ того, исключаемъ всѣ кратныя 9-ти. Слѣдствіемъ этого дѣйствія будетъ нѣкоторый остатокъ, меньшій 9-ти, иногда *нуль*. Подобнымъ образомъ, отдѣляемъ всѣ кратныя 9-ти при сложеніи цифръ найденной суммы слагаемыхъ, и получаемъ извѣстный остатокъ. Если полученные два остатка равны, то вообще сложеніе вѣрно.

Примѣръ. Повѣрить сложеніе

$$\begin{array}{r} 3672 \\ 863 \\ 914 \\ \hline 5449. \end{array}$$

Первое слагаемое доставляетъ остатокъ 0, второе 8, третье 5, потому что $3+6+7+2=2.9$, $8+6+3=9+8$ и $9+1+4=9+5$; слѣдовательно, какъ $8+5=9+4$, то отъ трехъ данныхъ слагаемыхъ произойдетъ остатокъ 4. Тотъ же остатокъ получится и отъ суммы 5449, ибо $5+4+4+9=2.9+4$. Изъ равенства найденныхъ двухъ остатковъ заключаемъ, что сложеніе вѣрно.

Повѣрка вычитанія. Для повѣрки вычитанія стоитъ только принять вычитаемое число и разность за слагаемыя, а уменьшаемое, за ихъ сумму, и потомъ поступать какъ сейчасъ было объяснено для сложенія.

Примѣръ. Повѣрить вычитаніе

$$\begin{array}{r} 6\cdot0\cdot8\cdot1\cdot5 \\ 4\;9\;3\;6 \\ \hline 5\;5\;8\;7\;9. \end{array}$$

Слагаемыя доставляютъ:

$$4+9+3+6=2.9+4$$
$$5+5+8+7+9=3.9+7;$$

взявъ сумму, получимъ

$$5.9+11=56=6.9+2;$$

и такъ, остатокъ перваго дѣйствія будетъ число 2.

Число 60815, принимаемое за сумму слагаемыхъ, даетъ тотъ же остатокъ 2; дѣйствительно $6+8+1+5=20=2.9+2$. Слѣдовательно вычитаніе вѣрно.

Повѣрка умноженія. Отдѣливъ всѣ кратныя 9-ти какъ отъ множимаго, такъ и отъ множителя, найдемъ два остатка; если перемножимъ сіи послѣдніе, и опять откинемъ въ произведеніи всѣ кратныя 9-ти, то получимъ нѣкоторое число, ме́ньшее 9-ти, которое и замѣтимъ. Далѣе, складывая цифры повѣряемаго произведенія, и отбрасывая всѣ кратныя 9-ти, дойдемъ также до нѣкотораго остатка. Если этотъ остатокъ одинаковъ съ замѣченнымъ прежде числомъ, то умноженіе вообще вѣрно.

Примѣръ. Повѣрить умноженіе

```
  69
  85
----
 345
552
----
5865.
```

Остатокъ множимаго 69 равенъ 6; остатокъ множителя 85 равенъ 4; произведеніе этихъ двухъ остатковъ $6\times4=24=2.9+6$. И такъ, замѣчаемъ число 6.

Повѣряемое произведеніе 5865 доставляетъ

$$5+8+6+5=24=2.9+6;$$

такъ какъ здѣсь получается тотъ же остатокъ, то есть число 6, то и заключаемъ, что умноженіе вѣрно.

Въ равенствѣ упоминаемыхъ остатковъ легко увѣриться слѣдующимъ образомъ: напишемъ множители 69 и 85 въ видѣ

$$69=7.9+6,\quad 85=9.9+4;$$

получимъ

$$69.85=(7.9+6)\times85.$$

Но, въ силу § 34, имѣемъ

$$69.85=7.85.9+6.85,$$

или

$$69.85=7.85.9+6\times(9.9+4),$$

или еще

$$69.85=7.85.9+6.9.9+6.4.$$

Съ другой стороны, такъ какъ $6.4=2.9+6$, то и будетъ

$$69.85=(7.85+6.9+2)\times9+6.$$

Это равенство доказываетъ сказанное объ повѣркѣ умноженія. Дѣйствительно, послѣдній членъ, именно число 6, изображаетъ остатокъ дѣленія на 9 произведенія двухъ чиселъ 6 и 4, которыя произошли отъ раздѣленія множителей 69 и 85 на тотъ же дѣлитель 9. Найденный остатокъ 6, какъ слѣдуетъ изъ самаго равенства, будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ и остаткомъ дѣленія на 9 повѣряемаго произведенія, то есть числа $5865=69.85$. Очевидно, что при повѣркѣ всякаго другаго умноженія дошли бы до того же самаго заключенія.

Повѣрка дѣленія. Когда при дѣленіи нѣтъ остатка, то для повѣрки этого дѣйствія должно поступать точно такъ какъ въ умноженіи, принимая дѣлитель и частное число за множители, а дѣлимое, за произведеніе.

Примѣръ. Повѣрить дѣленіе

$$\begin{array}{r|l} 1564 & 68 \\ 136 & \overline{23} \\ \hline 204 & \\ 204 & \\ \hline 0. & \end{array}$$

Остатокъ дѣленія 68 на 9 равенъ 5, ибо $6+8=9+5$; 23-хъ, также 5-ти, потому что $2+3=5$; произведеніе $5.5=25$

$=2.9+7$. И такъ, если дѣленіе вѣрно, то дѣлимое, по раздѣленіи на 9, должно произвести остатокъ 7, что̀ дѣйствительно такъ, ибо $1+5+6+4=16=9+7$.

Когда при дѣленіи получается остатокъ, то для повѣрки дѣйствія должно придать цифры этого остатка къ произведенію остатковъ дѣлителя и частнаго, и откинуть потомъ всѣ кратныя 9-ти. Если найденное такимъ образомъ число одинаково съ остаткомъ дѣленія на 9 даннаго дѣлимаго, то дѣленіе вообще вѣрно. Вотъ примѣръ:

```
3824 | 34
34   |-----
---- | 112
 42
 34
 ---
  84
  68
  ---
Остатокъ:  16.
```

Здѣсь сумма цифръ дѣлителя $3+4=7$, а частнаго числа $1+1+2=4$; помножая 7 на 4, и придавая къ произведенію сумму цифръ остатка, то есть $1+6=7$, получимъ

$$7.4+7=35=3.9+8;$$

и такъ, остатокъ дѣленія числа 3824 на 9, долженъ быть 8, что̀ дѣйствительно справедливо, ибо $3+8+2+4=17$, а $1+7=8$.

При этомъ случаѣ необходимо замѣтить, что повѣрки вообще не должно считать несомнѣнными признаками безошибочности повѣряемыхъ выкладокъ. Очень можетъ случиться, что хотя изъ повѣрки и оказывается вѣрность найденнаго результата, а между тѣмъ онъ будетъ ошибоченъ, и на оборотъ. Такъ напримѣръ, повѣряя числомъ 9 сложеніе

```
 327
 863
----
1235
```

которое произведено погрѣшительно, усматриваемъ однакожъ, что сумма цифръ двухъ слагаемыхъ

$$3+2+7+8+6+3=29=3.9+2,$$

по раздѣленіи на 9, даетъ тотъ же остатокъ 2, какъ и сумма

$$1+2+3+5=9+2.$$

Если положиться на повѣрку, то слѣдовало бы заключить, что сумма 1235 вѣрна; между тѣмъ, на самомъ дѣлѣ, она ошибочна, и дѣйствительная сумма равна 1190, а не 1235. Равенство двухъ остатковъ произошло отъ того что сумма цифръ слагаемыхъ одинакова для обоихъ результатовъ 1235 и 1190. Въ самомъ дѣлѣ, если вмѣсто перваго слагаемаго 327 напишемъ 372, то получимъ вѣрную сумму

$$372+863=1235.$$

При повѣркахъ числомъ 9 различіе разрядовъ единицъ не принимается въ расчётъ, и отъ этото самаго заключеніе о безошибочности произведеннаго вычисленія можетъ еще оставаться подъ сомнѣніемъ. И вообще, не говоря уже о томъ, что самое дѣйствіе повѣрки можетъ быть произведено погрѣшительно, должно еще замѣтить, что при разсматриваніи однихъ остатковъ дѣленія на какія бы то числа не было, не принимаются въ расчётъ величины частныхъ, почему подобныя повѣрки и нельзя считать вполнѣ строгими. Лучше всего повѣрять сложныя ариѳметическія выкладки нѣсколькими способами, и даже совсѣмъ передѣлывать ихъ, измѣняя только, по извѣстнымъ правиламъ, порядокъ данныхъ чиселъ.

§ 110. Въ Отдѣлѣ IV (§ 70) былъ предложенъ, безъ доказательства, признакъ дѣлимости цѣлыхъ чиселъ на 7, 11 и 13, общій этимъ тремъ дѣлителямъ. Приведемъ теперь нѣкоторыя соображенія, на которыхъ можно основывать выводы подобныхъ признаковъ. Излагаемыя ниже подробности послужатъ, вмѣстѣ съ тѣмъ, полезнымъ дополненіемъ къ статьѣ о дѣлимости цѣлыхъ чиселъ.

Послѣдовательное разсмотрѣніе разрядовъ, состоящихъ изъ одной, двухъ, трехъ, четырехъ и такъ далѣе цифръ, считая ихъ отъ правой руки къ лѣвой, приводитъ самымъ естественнымъ образомъ къ разнымъ признакамъ дѣлимости цѣлыхъ чиселъ на нѣкоторые простые дѣлители; эти дѣлители, по свойству производимаго дѣйствія, сами собой обнаруживаются. Начнемъ съ простѣйшаго случая. Составивъ равенства

$$10 = 1 + 9$$
$$10^2 = 100 = 10 + 9.10 = 1 + 9 + 9.10$$
$$10^3 = 1000 = 10 + 9.10 + 9.10^2 = 1 + 9 + 9.10 + 9.10^2$$

и такъ далѣе (*), прямо усматриваемъ, что каждое изъ чиселъ

$$10,\ 100,\ 1000,\ 10000\ldots\ldots,$$

по раздѣленіи на 9, даетъ остатокъ 1. И такъ, если бы желали знать, какой остатокъ произойдетъ отъ раздѣленія на 9 какого ни есть цѣлаго числа, положимъ 2485, то написавъ

$$5 = 5$$
$$80 = 8 + 9.8$$
$$400 = 4 + 9.4 + 9.10.4$$
$$2000 = 2 + 9.2 + 9.10.2 + 9.10^2.2$$

и сложивъ потомъ всѣ эти равенства, заключили бы, что остатокъ дѣленія 2485 на 9 одинаковъ съ остаткомъ дѣленія суммы $5 + 8 + 4 + 2 = 19$ на 9, и слѣдовательно равенъ *единицѣ*. Отсюда прямо проистекаетъ извѣстный признакъ дѣлимости цѣлыхъ чиселъ на 9.

Разсмотримъ теперь разряды, состоящіе изъ *двухъ* цифръ. Составивъ рядъ равенствъ

$$10^2 = 100 = 1 + 11.9$$
$$10^4 = 10000 = 10^2 + 11.9.10^2 = 1 + 11.9 + 11.9.10^2$$
$$10^6 = 1000000 = 10^2 + 11.9.10^2 + 11.9.10^4 = 1 + 11.9 + 11.9.10^2 + 11.9.10^4$$

и такъ далѣе, увидимъ, что каждое изъ чиселъ

$$10^2,\ 10^4,\ 10^6,\ 10^8\ldots\ldots,$$

(*) Ясно, что при возвышеніи числа 10 въ послѣдовательныя степени, показатель будетъ означать число нулей, приписываемыхъ съ правой стороны къ единицѣ.

по раздѣленіи на 11 (или на 9), даетъ остатокъ 1. Слѣдовательно, еслибъ желали знать, какой получится остатокъ отъ раздѣленія, напримѣръ числа 981596, на 11, то написавъ

$$96 = 96$$
$$1500 = 15 + 11.9.15$$
$$980000 = 98 + 11.9.98 + 11.9.10^2.98,$$

и сложивъ потомъ всѣ эти равенства, заключили бы, какъ и выше, что остатокъ дѣленія числа 981596 на 11 одинаковъ съ остаткомъ дѣленія суммы $96 + 15 + 98 = 209$ (*) $= 11.19$ на 11, и слѣдовательно равенъ *нулю*, то есть что число 981596 дѣлится на 11 безъ остатка.

Принявъ въ расчетъ равенства

$$10 = 11 - 1$$
$$10^3 = 1000 = 11.10^2 - 10^2 = 11.10^2 - 11.9 - 1$$
$$10^5 = 100000 = 11.10^4 - 11.9.10^2 - 10^2 = 11.10^4 - 11.9.10^2 - 11.9 - 1$$

и такъ далѣе, легко будетъ вывести слѣдующій, простѣйшій признакъ дѣлимости цѣлыхъ чиселъ на 11: *по данному числу составляемъ сумму* 1-*ой*, 3-*ей*, 5-*ой и вообще всѣхъ цифръ нечётнаго порядка, начиная счётъ отъ правой или отъ лѣвой руки по произволенію; складываемъ также цифры чётнаго порядка, и получаемъ новую сумму. Если разность этихъ двухъ суммъ дѣлится на* 11, *то и предложенное число дѣлимо на* 11.

Чтобы показать самымъ вразумительнымъ образомъ справедливость этого правила, можно, основываясь на приведенныхъ выше разложеніяхъ, расположить равенства, напримѣръ для числа 2178, въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$8 = \qquad\qquad + 8$$
$$70 = \qquad 11.7 - 7$$
$$100 = \qquad 11.9 + 1$$
$$2000 = 11.10^2.2 - 11.9.2 - 2$$

(*) Разбивъ число 209 на двухъ-цифренныя грани, получимъ 09 и 2, или просто 9 и 2; согласно же съ правиломъ, должно взять сумму этихъ граней $9 + 2 = 11$, и какъ она дѣлится на 11, то заключаемъ, что и предложенное число дѣлимо на 11.

Такъ какъ $+8-7+1-2=0$, а *нуль*, на какое бы число его не дѣлили, не дастъ остатка, то заключаемъ, что 2178 дѣлимо на 11.

Переходимъ теперь къ разрядамъ о *трехъ* цифрахъ. Такъ какъ

$$10^3 = 1000 = 1 + 37.27$$

$$10^6 = 1000000 = 10^3 + 37.27.10^3 = 1 + 37.27 + 37.27.10^3$$

и такъ далѣе, то разсуждая по предъидущему заключаемъ, что *цѣлое число дѣлимо на простой дѣлитель* 37, *когда, разложивъ его отъ правой руки къ лѣвой на трехъ-цифренныя грани, сумма этихъ граней будетъ дѣлиться безъ остатка на тό же число* 37.

Въ заключеніе разсмотримъ еще разряды, состоящіе изъ *шести* цифръ. Замѣтивъ, что

$$10^6 = 1 + 7.11.13.37.27$$

$$10^{12} = 10^6 + 7.11.13.37.27.10^6 = 1 + 7.11.13.37.27 + 7.11.13.37.27.10^6$$

и такъ далѣе, увидимъ, что признакъ дѣлимости цѣлаго числа на одинъ изъ простыхъ дѣлителей 7, 11, 13, 37 (а также и на сложный $27 = 3^3$) состоитъ въ томъ, чтобы *сумма шести-цифренныхъ граней дѣлилась на него безъ остатка.* Очевидно впрочемъ, что найденный признакъ равно относится и къ сложнымъ дѣлителямъ $7.11 = 77$, $7.13 = 91$, $11.13 = 143$, $3.7 = 21$, $9.7 = 63$, $27.7 = 189$, $3.7.11 = 231$ и проч.

Выведенное сей-часъ правило можетъ быть упрощено относительно простыхъ дѣлителей 7, 11 и 13 на основаніи новыхъ равенствъ:

$$10^3 = 7.11.13 - 1$$

$$10^9 = 7.11.13.10^6 - 10^6 = 7.11.13.10^6 - 7.11.13.37.27 - 1$$

и такъ далѣе. Дѣйствительно, разсуждая какъ въ случаѣ простаго числа 11, мы приведены будемъ къ слѣдующему признаку дѣлимости даннаго числа на одинъ изъ простыхъ дѣлителей 7, 11, 13, или на одинъ изъ сложныхъ $7.11 = 77$, $7.13 = 91$, $11.13 = 143$, $7.11.13 = 1001$: *надобно разбить данное число на трехъ-цифренныя грани, отъ правой руки къ лѣвой, при чёмъ послѣдняя грань можетъ заключать въ себѣ менѣе трехъ цифръ, то есть одну или двѣ; потомъ*

найти отдѣльно сумму граней нечётнаго и чётнаго порядка; вычтя мѐньшую сумму изъ бо̀льшей, получится нѣкоторая разность. Если она дѣлится на разсматриваемый дѣлитель, то и предложенное число также дѣлится на него. Въ противномъ случаѣ заключаемъ съ достовѣрностію, что данное число того дѣлителя не имѣетъ.

КОНЕЦЪ.

УПОТРЕБИТЕЛЬНѢЙШІЯ МѢРЫ ВЪ РОССІИ.

I. *Мѣры длины.*

Миля = 7 верстамъ.

Верста = 500 саженямъ.

Сажень = 7 Англійск. или Русск. футамъ = 3 аршинамъ.

Аршинъ = 4 четвертямъ или 16 вершкамъ.

Футъ = 12 дюймамъ.

Дюймъ = 10 линіямъ = 100 скрупуламъ.

II. *Мѣры поверхностей.*

Квадратная верста = 500×500 или 250000 квадр. саженямъ.

Квадратная сажень = 3×3 или 9 квадр. аршинамъ.

Квадратная сажень = 7.7 или 49 квадр. футамъ.

1 десятина = 2400 квадр. саженямъ.

III. *Мѣры объёмовъ тѣлъ.*

Кубическая сажень = 3×3×3 или 27 кубич. аршинамъ.

Кубич. саж. = 7×7×7 или 343 кубич. футамъ.

Кубич. аршинъ = 16×16×16 или 4096 кубич. вершкамъ

Кубич. футъ = 12×12×12 или 1728 кубич. дюймамъ.

IV. *Мѣры для сыпучихъ тѣлъ.*

Четверть или куль = 2 осминамъ.

Осмина = 4 четверикамъ.

*

Четверикъ = 8 гарнцамъ.

Гарнецъ = 30 долямъ.

V. *Мѣры для жидкостей.*

Бочка = 40 ведрамъ.

Ведро = 10 кружкамъ.

Кружка = 10 чаркамъ.

VI. *Вѣсъ.*

Берковецъ = 10 пудамъ.

Пудъ = 40 фунтамъ.

Фунтъ = 32 лотамъ или 96 золотникамъ.

Лотъ = 3 золотникамъ.

Золотникъ = 96 долямъ.

VII *Медицинскій или аптекарскій вѣсъ.*

Фунтъ = $\frac{7}{8}$ общаго фунта = 84 золотникамъ = 12 унціямъ.

Унція = 8 драхмамъ.

Драхма = 3 скрупуламъ.

Скрупулъ = 20 гранамъ.

VIII. *Монета.*

Рубль = 10 гривнамъ = 100 копѣйкамъ; копѣйка подраздѣляется на $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$.

Рубль серебромъ = 3 руб. 50 коп. на ассигнаціи.

Рубль золотомъ = 103 коп. серебромъ.

Вещественная монета. ***Золотая***: имперіалъ = 10 зол. руб. (на серебро 10 руб. 30 коп.); полуимперіалъ = 5 зол. руб.

(на серебро 5 руб. 15 коп.); трехърублевикъ = 3 зол. руб. (на серебро 3 руб. 9 коп.). *Серебреная*: главная монетная единица: *цѣлковый*, 1 рубль серебромъ; монета въ $1\frac{1}{2}$ руб. сер.; въ $\frac{3}{4}$ рубля или 75 коп. сер.; *полтинникъ*, 50 коп. сер.; въ 30 коп. сер.; *четвертакъ*, 25 коп. сер.; *двугривенникъ*, 20 коп. сер.; 15 коп. сер.; *гривенникъ*, 10 коп. сер.; *пятачокъ*, 5 коп. серебромъ. *Мѣдная*: въ 5, 3, 2, 1, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ коп. сер.

Государственные кредитные билеты: въ 1 рубль серебромъ, въ 3 рубля, въ 5, 10, 25, 50 и 100 руб. серебромъ.

IX. *Раздѣленіе времени.*

Годъ = 12 мѣсяцамъ; *простой* годъ содержитъ въ себѣ 365 сутокъ, а *високосный* 366.

Въ мѣсяцѣ бываетъ по 30 дней и по 31 дню, кромѣ Февраля, состоящаго изъ 28 дней въ простомъ году, а изъ 29 въ високосномъ.

Недѣля = 7 суткамъ. Однѣ сутки = 24 часамъ.

Часъ = 60 минутамъ. Минута = 60 секундамъ.

Сверхъ того, секунду подраздѣляютъ на 60 терцій, которыя, по малости своей, не употребляются.

X. *Шестидесятичное раздѣленіе окружности круга.*

Окружность круга раздѣляется на 360 равныхъ частей, называемыхъ *градусами*. Поэтому, четверть окружности = 90 градусамъ. Подраздѣленія градуса слѣдующія: 1 градусъ = 60 минутамъ; минута = 60 секундамъ; секунда = 60 терціямъ. Градусъ означается знакомъ (^{0}), минута ($'$), секунда ($''$), терція ($'''$). Такъ напримѣръ число $15^0\,53'\,45''$ должно произносить: 15 *градусовъ* 53 *минуты и* 45 *секундъ*.

XI. *Мѣра бумаги.*

1 стопа = 20 дестямъ.

Десть = 24 листамъ.

Листъ = 2 полулистамъ или 4 четверткамъ.

XII. *Форматы книгъ.*

Въ листъ, или, правильнѣе, въ полъ-листа (in-folio).

Въ четвертку или въ четвертую долю (in-quarto).

Въ осьмушку или въ осьмую долю (in-octavo).

Въ двѣнадцатую долю (in-douze).

Въ шестнадцатую долю (in-seize).

Сверхъ того форматы бываютъ: въ 18-ю долю листа, въ 24-ю, въ 36-ю, въ 48-ю, въ 64-ю, въ 72-ю, въ 96-ю и проч.

На печатный листъ приходится *вдвое* страницъ противъ доли формата. Такъ при форматѣ *въ полъ-листа*, въ полномъ листѣ 4 страницы; въ листѣ, напечатанномъ въ *четвертку*, 8 страницъ; *въ осьмушку*, 16 страницъ, и такъ далѣе.

Французская метрическая система.

Основаніемъ Французской метрической системы служитъ *единица длины*, которую заимствовали изъ измѣреній земнаго шара, чѣмъ устранили всякій произволъ. За главную единицу длины приняли *десяти-милліонную часть четверти земнаго меридіана*, или, что всё равно, десяти–милліонную часть разстоянія экватора отъ полюса. Часть, о которой говоримъ, назвали *метромъ*. Изъ этой основной единицы, длина которой равна 1,40610... Русскаго аршина, выведены всѣ другія вспомогательныя мѣры. Вотъ названія всѣхъ единичныхъ мѣръ:

Единица длины называется *метръ* (mètre).

Единица поверхности, *аръ* (are).

Единица объёма, *стеръ* (stère).

Единица вмѣстимости, *литръ* (litre).

Единица вѣса, *граммъ* (gramme).

Монетная единица, *франкъ* (franc).

Всѣ другія мѣры, высшихъ и нисшихъ наименованій, установлены *десятичныя*. Названія ихъ составляются весьма простымъ образомъ. Для полученія наименованій бо̀льшихъ мѣръ, ставятъ предъ названіемъ единицы Греческія слова: *дека*, *экто хило*, *миріа*, означающія соотвѣтственно числа: 10, 100, 1000, 10000, а для мѐньшихъ, Латинскія слова: *деци, центи*, *милли*, означающія десятичныя части $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$. Такимъ образомъ для мѣръ длины имѣемъ:

Миріаметръ $=$ 10000 метрамъ.

Хилометръ $=$ 1000 »

Эктометръ $=$ 100 »

Декаметръ $=$ 10 »

Метръ главная единица.

Дециметръ $= \frac{1}{10}$ метра.

Центиметръ $= \frac{1}{100}$ »

Миллиметръ $= \frac{1}{1000}$ »

Для прочихъ единицъ, названія составляются точно такъ же.

Всѣ поименованныя мѣры, какъ сказано выше, подчинены основной единицѣ, *метру*. И такъ, *аръ* равняется ста квадратнымъ метрамъ, или, что̀ всё равно, площади квадрата, сторона котораго есть декаметръ. *Стеръ* то̀ же что̀ кубическій метръ. *Литръ* равняется кубическому дециметру. *Граммъ* опредѣляется вѣсомъ кубическаго центиметра чистой перегнанной воды при наибо̀льшей ея плотности. Наконецъ *франкъ*,

серебряная монета, вѣсомъ въ *пять* граммовъ, и содержащая въ себѣ 9 частей чистаго серебра и одну часть лигатуры.

Неизмѣняемость основной единицы длины, заимствованной изъ самой природы, и простота десятичнаго подраздѣленія мѣръ, составляютъ весьма важныя преимущества Французской метрической системы.

Сравненіе главныхъ Русскихъ, Французскихъ и Англійскихъ мѣръ между собою.

Мѣры длины.

Русскій или Англійскій футъ = 0,30479 метра.
Сажень = $2\frac{1}{3}$ Англ. ярда = 2,13356 метра.
Ярдъ = $1\frac{2}{7}$ аршина = 0,91438 метра.
Аршинъ = $\frac{7}{9}$ ярда = 0,71119 метра.
Метръ = 1,40610 аршина.

Вѣсъ.

Русскій фунтъ = 1,09718 Англ. тройскаго фунта.
= 0,90283 Англ. торговаго фунта (avoir du pois).
= 0,40952 хилограмма.
Хилограммъ = 2,44190 Русскаго фунта.
= 2,67921 Англ. тройскаго фунта.
= 2,20461 Англ. торг. фунта (avoir du pois).

Монета.

Англійская: ливръ или фунтъ стерлингъ = 20 шиллингамъ; крона = 5 шиллингамъ; шиллингъ = 12 пенсамъ; пенсъ = 4 фартингамъ; фартингъ = $\frac{16}{25}$ копѣйки серебромъ.

Рубль серебромъ = 3,255 шиллинга.

= 3,996 Французск. франка, или, около 4 франковъ.

Шиллингъ = 0,307 рубля серебр. = 1,22 франка.

Франкъ = 0,2502 рубля серебр. = 0,82 шиллинга.

Таблица для сравненія употребительнѣйшихъ путевыхъ мѣръ.

Верста.	Англійская миля.	Франц. почтовая миля (lieue de poste).	Нѣмец. или Георг. миля.	Морская или Италіанская миля.	Миріаметръ.
1 =	0,66288	0,23960	0,14376	0,57505	0,10668
1,50857	=1=	0,36146	0,21688	0,86750	0,16093
4,17353	2,76661	= 1 =	$\frac{3}{5}$	$2\frac{2}{5}$	0,44524
6,95604	4,61112	$1\frac{2}{3}$	= 1 =	4	0,74207
1,73898	1,15273	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	=1=	0,18551
9,37383	6,21371	2,24597	1,34759	5,39042	= 1

ДОПОЛНЕНІЕ

КЪ СТАТЬѢ О ДЕСЯТИЧНЫХЪ ДРОБЯХЪ.

Въ § 93 (Отдѣлъ VI) предложены, безъ доказательства, признаки разложимости обыкновенной несократимой дроби въ *простую* и въ смѣшанную *періодическую дробь* десятичную. Приведемъ теперь нѣкоторыя соображенія, на основаніи которыхъ эти признаки могутъ быть доказаны строгимъ образомъ.

И во первыхъ, не должно терять изъ виду, что всякая несократимая дробь, у которой знаменатель имѣетъ хотя одинъ дѣлитель, отличный отъ 2 и 5, приводитъ всегда къ *безконечной періодической* десятичной дроби. Такъ напримѣръ $\frac{35}{88}$ обращается въ *смѣшанную періодическую* дробь

$$\frac{35}{88} = 0,397727272.....$$

Если бы дана была періодическая дробь, и требовалось обратить её въ обыкновенную, то изобразивъ послѣднюю буквою x, и употребивъ извѣстный пріёмъ (§ 94), нашли бы

$$\begin{array}{rrl} & 100000\,x = & 39772,727272..... \\ \text{вычтя} & 1000\,x = & 397,727272...... \\ \hline & 99000\,x = & 39375, \end{array}$$

откуда

$$x = \frac{39375}{99000}.$$

По сокращеніи обоихъ членовъ этой дроби на общій наибольшій ихъ дѣлитель 1125, получимъ

$$0,397727272..... = \frac{39375}{99000} = \frac{35}{88}.$$

Обратимъ теперь вниманіе на тò обстоятельство, что какую

бы смѣшанную періодическую дробь не обращали въ обыкновенную, знаменатель непосредственно получаемой дроби, до ея сокращенія (какъ 99000 въ приведенномъ сей-часъ примѣрѣ), будетъ всегда составленъ изъ цифры 9, написанной нѣсколько разъ сряду, и сопровождаемой нулями. Отсюда мы въ правѣ заключить, что *всякое цѣлое число, безъ исключенія, будетъ дѣлителемъ числа вида*

$$9\ldots.999000\ldots.0,$$

состоящаго изъ повторенной цифры 9, *за которою слѣдуетъ нѣсколько нулей*; сколько же разъ должно повторить цифру 9 и знакъ 0, то этого нельзя рѣшить безъ предварительнаго вычисленія.

Въ самомъ дѣлѣ, вспомнимъ, что *всякая* несократимая обыкновенная дробь обращается въ простую, или въ смѣшанную періодическую десятичную, когда въ составъ знаменателя обращаемой дроби входитъ хотя одинъ множитель, отличный отъ 2 и 5, не исключая впрочемъ послѣднихъ двухъ чиселъ и ихъ степеней. Поэтому, знаменатель обращаемой дроби можетъ быть *рѣшительно* произвольный. Съ другой же стороны найдется, что предложенная обыкновенная дробь выражается новою дробью, получаемою непосредственно чрезъ обращеніе безконечной десятичной; и какъ у новой дроби знаменатель равенъ числу, состоящему изъ повторенной цифры 9 съ нулями, то и заключаемъ, что это число дѣлится безъ остатка на знаменатель первоначальной несократимой дроби. Такъ въ приведенномъ выше примѣрѣ имѣли

$$\frac{35}{88} = \frac{39375}{99000};$$

по причинѣ же несократимости дроби $\frac{35}{88}$, это равенство иначе состояться не можетъ, какъ предположивъ, что 99000 дѣлится на-цѣло на 88. И дѣйствительно, мы уже видѣли что

$$\frac{99000}{88} = 1125 \text{ и } \frac{39375}{35} = 1125.$$

Изъ доказаннаго сей-часъ Предложенія выводимъ, какъ *Слѣдствіе*, что *всякое число, не дѣлящееся на* 2 *или на* 5,

будетъ непремѣнно дѣлителемъ числа вида 9....999. Дѣйствительно, такъ какъ первая часть равенства

$$9....999000....0 = 9...999 \times 1000....0,$$

написаннаго въ видѣ

$$9.....999000....0 = 9...999 \times 2.5.2.5.2.5....,$$

дѣлится на всякое число, а слѣдовательно и на такое, которое не заключаетъ въ себѣ множителемъ ни 2, ни 5, то и вторая часть должна также дѣлиться на подобное число. Если бы 9....999 не дѣлилось хотя на одинъ изъ множителей сего послѣдняго, положимъ на 11, то это значило бы, что произведеніе цѣлаго числа, простаго съ 11, на 2.5.2.5.2.5...., дѣлится на 11, чего не можетъ быть, потому что цѣлое число допускаетъ одно только разложеніе на простые множители (Отдѣлъ IV, § 66). И такъ, *всегда можно написать цифру* 9 *столько разъ сряду, что полученное число будетъ дѣлиться нà-цѣло на всякое другое, первое съ* 2 *и* 5.

Теперь уже легко доказать и признаки разложимости обыкновенной дроби на *простую* и на *смѣшанную* періодическую.

По самому пріёму, служащему для приведенія *простой* періодической дроби къ обыкновенной, усматриваемъ, что получаемый знаменатель всегда изобразится числомъ, состоящимъ изъ повторенной цифры 9; и такъ, этотъ знаменатель можетъ быть только вида: 9 или 99 или 999 и проч. Съ другой же стороны, какъ ни одно изъ этихъ чиселъ не дѣлится ни на 2, ни на 5, то заключаемъ, что знаменатель разлагаемой несократимой дроби дѣлителей 2 и 5 также имѣть не можетъ. Если, сверхъ того, примемъ въ соображеніе приведенное сей-часъ *Слѣдствіе* о дѣлимости числа 9....999 на всякое другое, кромѣ 2 и 5, то въ правѣ будемъ вывести такое заключеніе: *когда знаменатель несократимой дроби не дѣлится ни на* 2, *ни на* 5, *то обращая эту дробь въ десятичную, получимъ* простую *періодическую.*

Такъ же легко доказать и признакъ, относящійся къ *смѣшаннымъ* періодическимъ дробямъ. Положимъ дана несократи-

мая дробь, у которой знаменатель дѣлится на нѣкоторыя степени чиселъ 2 и 5. Пусть эта дробь будетъ напримѣръ

$$\frac{971}{2200}=\frac{971}{2^3.5^2.11};$$

такъ какъ число 2 входитъ въ знаменатель *три* раза множителемъ, а 5 только *два* раза, то заключаемъ, сообразно съ признакомъ, приведеннымъ въ § 93 (Отдѣлъ VI), что данная дробь разлагается на *смѣшанную* періодическую, при чёмъ число цифръ, предшествующихъ періоду, будетъ равно *тремъ*. Чтобъ удостовѣриться въ справедливости предложеннаго правила, представимъ данную дробь въ видѣ

$$\frac{971}{2^3.5^2.11}=\frac{971\times5}{2^3.5^3.11}=\frac{971\times5}{11\times1000},$$

и разсмотримъ сперва слѣдующую:

$$\frac{971\times5}{11}=441,363636......,$$

которая въ 1000 разъ болѣе настоящей. Такъ какъ знаменатель 11 не дѣлится ни на 2, ни на 5, то десятичная дробь должна быть *простая* періодическая, что̀ дѣйствительно и справедливо. Для полученія настоящей дроби, стоитъ только найденную 441,363636.... раздѣлить на 1000, то есть, перенести запятую въ лѣвую сторону на *три* десятичные знака, которые и составятъ часть, предшествующую періоду. Такимъ образомъ получимъ

$$\frac{971\times5}{11\times1000}=\frac{971}{2200}=0,441363636......,$$

согласно съ найденнымъ выше.

Приведемъ еще доказательство любопытнаго свойства обыкновенныхъ дробей, обращающихся въ безконечныя десятичныя.

Когда обыкновенныя несократимыя дроби имѣютъ одинакіе знаменатели, и обращаются въ безконечныя десятичныя, то для всѣхъ дробей періоды будутъ состоять изъ одинаковаго числа цифръ.

Такъ каждая изъ дробей

$$\frac{1}{11}=0,090909.....,\ \frac{2}{11}=0,181818.....,\ \frac{3}{11}=0,272727....,$$

$$\frac{4}{11}=0,363636.....,\ \frac{5}{11}=0,454545.....\ \text{и проч.}$$

имѣетъ по *двѣ* цифры въ періодѣ, какъ и самая простая изъ нихъ $\frac{1}{11}$.

Чтобъ отдать себѣ отчётъ въ этомъ свойствѣ, обратимъ вниманіе на то̀, что при дѣйствіи превращенія обыкновенной дроби въ десятичную, періодъ обнаруживается возвращеніемъ одного изъ остатковъ, полученныхъ уже прежде. Напримѣръ, обращая дробь $\frac{1}{88}$ въ десятичную, получимъ

	100	88
	88	0,01136
1-ый Ост: = 12.....	120	
	88	
2-ой Ост: = 32.....	320	
	264	
3-ій Ост: = 56.....	560	
	528	
4-ый Ост: = 32.		

Здѣсь остатки будутъ по порядку 12, 32, 56, 32 и проч.; такъ какъ *четвертый* остатокъ равенъ *второму*, то заключаемъ, что періодъ десятичной дроби, выражающей $\frac{1}{88}$, состоитъ изъ *двухъ* цифръ, именно изъ числа 36. Къ тому же самому заключенію приведутъ насъ равенства

$$\frac{1000}{88}=11+\frac{32}{88} \text{ и } \frac{100000}{88}=1136+\frac{32}{88},$$

непосредственно слѣдующія изъ предъидущаго дѣленія; послѣднія двѣ цифры частнаго 1136, именно число 36, изобразитъ *періодъ* десятичной дроби, а изъ всего частнаго выведемъ самую десятичную дробь 0,011363636...., равную $\frac{1}{88}$.

Положимъ теперь, желаемъ увѣриться, что несократимая дробь $\frac{35}{88}$, имѣющая съ $\frac{1}{88}$ одинъ и тотъ же знаменатель 88, по разложеніи въ десятичную, дастъ также *двѣ* цифры въ періодѣ. умноживъ предъидущія равенства на новый числитель 35, получимъ слѣдующія два, относящіяся уже къ дроби $\frac{35}{88}$:

$$\frac{35\times1000}{88}=35\times11+\frac{35\times32}{88}$$
$$\frac{35\times100000}{88}=35\times1136+\frac{35\times32}{88}.$$

Изъ этого видимъ, что остатки дѣленія двухъ произведеній 35×1000 и 35×100000 на 88 будутъ равны между собою, ибо какъ тотъ, такъ и другой, получаются отъ раздѣленія 35×32 на 88; по причинѣ же, что $\frac{35\times32}{88}=12+\frac{64}{88}$, получимъ

$$\frac{35\times1000}{88}=397+\frac{64}{88},\quad \frac{35\times100000}{88}=39772+\frac{64}{88}.$$

Здѣсь остатокъ 64 имѣетъ рѣшительно тó же значеніе въ разсужденіи дроби $\frac{35}{88}$, какое остатокъ 32 имѣлъ относительно $\frac{1}{88}$: тотъ и другой означаютъ *первые возвращающіеся остатки*. Въ первомъ равенствѣ 64 есть 2-й остатокъ, а во второмъ тò же число 64 изображаетъ 4-й остатокъ. Слѣдовательно, періодъ состоитъ изъ *двухъ* цифръ, какъ и для дроби $\frac{1}{88}$, и равенъ числу 72, то есть послѣднимъ двумъ цифрамъ частнаго 39772; самая же десятичная дробь, выражающая $\frac{35}{88}$, получается непосредственно изъ всего этого частнаго, и будетъ 0,397727272....

Само собой разумѣется, что доказанное свойство приличествуетъ какъ правильнымъ, такъ и неправильнымъ дробямъ, будутъ ли онѣ обращаться въ простыя, или въ смѣшанныя періодическія десятичныя дроби.

Въ заключеніе покажемъ, какимъ образомъ сказанное о безконечныхъ десятичныхъ дробяхъ обнаруживаетъ существованіе *несоизмѣримыхъ чиселъ*. Для этого примемъ въ соображеніе, что *всякая обыкновенная дробь можетъ быть выражена или конечною десятичною дробью, или безконечною періодическою*. Отсюда заключаемъ, что *безконечная десятичная дробь, не періодическая, не можетъ быть выражена обыкновенною дробью*, ибо, въ противномъ случаѣ, одно и тó же дробное число выражалось бы двумя различными десятичными дробями, чтó очевидно невозможно. И такъ, остается только показать, что дѣйствительно существуютъ *безконечныя десятичныя дроби не періодическія*. Такихъ дробей безчисленное множество: въ самомъ

дѣлѣ, мы можемъ вообразить, что послѣдовательныя десятичныя цифры пишутся безъ всякаго порядка, или даже въ нѣкоторомъ порядкѣ, но не періодическомъ, какъ напримѣръ въ дроби 0,101001000100001...., въ которой, послѣ каждой единицы, прибавляется по одному нулю. Вотъ еще другіе примѣры:

2,3131131113111113.....

0,0120012000120000012.....

5,1223331122333111223331111.....

0,123456789101112131415161718192021.....

ПРИМѢЧАНІЕ.

Въ этомъ Примѣчаніи мы докажемъ Предложеніе 3-е (стр. 67) независимо отъ свойства, по которому цѣлое число допускаетъ только одно разложеніе на простые множители (§ 66).

Пусть данное число будетъ 1260, и положимъ извѣстно, что оно дѣлится отдѣльно на взаимно-простые дѣлители 9 и 20; надобно доказать, что оно дѣлимо также и на произведеніе ихъ $9 \times 20 = 180$.

Раздѣливъ 1260 сперва на 9, а потомъ на 20, получимъ, по самому предположенію, частныя безъ остатковъ, именно

$$\frac{1260}{9} = 140 \quad \text{и} \quad \frac{1260}{20} = 63.$$

Вообразимъ теперь, что первое изъ этихъ двухъ частныхъ раздѣлено на 20, а второе на 9; найдется

$$\frac{1260}{9.20} = \frac{140}{20} \quad \text{и} \quad \frac{1260}{20.9} = \frac{63}{9},$$

и слѣдовательно

$$\frac{140}{20} = \frac{63}{9}.$$

Если бы мы знали напередъ, что въ получаемыхъ такимъ образомъ двухъ дробяхъ (въ настоящемъ случаѣ въ $\frac{140}{20}$ и $\frac{63}{9}$), числитель дѣлится безъ остатка на знаменатель, то это значило бы, что и равная имъ дробь (въ нашемъ примѣрѣ $\frac{1260}{9.20}$) при-

водится къ цѣлому числу; отсюда заключили бы, что предложенное число (1260) дѣлится на́-цѣло на произведеніе (9.20) двухъ данныхъ взаимно-простыхъ множителей. Посмотримъ же теперь, къ какому слѣдствію мы будемъ приведены, если не допустимъ этой дѣлимости; тогда получатся двѣ настоящія дроби $\frac{140}{20}$ и $\frac{63}{9}$, равныя между собою, съ знаменателями взаимно-простыми. Но мы сей-часъ увидимъ, что такое равенство невозможно, а изъ этой невозможности уже непосредственно слѣдуетъ и справедливость доказываемаго Предложенія.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что найденныя двѣ дроби, равныя между собою, по отдѣленіи отъ каждой цѣлаго числа, приведены къ самому простому виду чрезъ уничтоженіе дѣлителей, общихъ обоимъ ихъ членамъ. И въ этомъ видѣ ихъ знаменатели очевидно останутся взаимно-простыми. Пусть, для бо́льшей ясности, найденныя двѣ дроби, послѣ сказанныхъ приготовленій, будутъ

$$\frac{4}{9} \text{ и } \frac{9}{20},$$

гдѣ знаменатели 9 и 20 взаимно-простыя числа; требуется доказать, что равенство $\frac{4}{9} = \frac{9}{20}$ невозможно. И во первыхъ замѣтимъ, что числители 4 и 9 этихъ дробей также могутъ быть приняты простыми между собою; дѣйствительно, еслибъ между ними былъ какой-либо общій наибо́льшій дѣлитель, то раздѣливъ на него оба числителя, мы не нарушили бы равенства дробей. Также не нарушится это равенство и при обращеніи двухъ дробей, потому что изъ допускаемаго равенства $\frac{4}{9} = \frac{9}{20}$ выведемъ послѣдовательно

$$\frac{4.20}{9} = 9,\ \ 4.20 = 9.9,\ \ 20 = \frac{9.9}{4} \text{ и наконецъ } \frac{20}{9} = \frac{9}{4}.$$

Возьмемъ теперь одну изъ двухъ разсматриваемыхъ, по предположенію равныхъ дробей $\frac{4}{9}$ и $\frac{9}{20}$, положимъ $\frac{4}{9}$. Обративъ её, получимъ

$$\frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}.$$

Дробь $\frac{20}{9}$ должна дать то̀ же цѣлое частное 2 съ присовокупленіемъ дроби, равной $\frac{1}{4}$; и какъ $\frac{20}{9} = 2 + \frac{2}{9}$, то заключаемъ что $\frac{1}{4} = \frac{2}{9}$, или $\frac{9}{4} = 2$, чего не можетъ быть, потому что 9 и 4 числа взаимно-простыя, и слѣдовательно 9 не дѣлится на̀-цѣло на 4.

Здѣсь достаточно было обратить каждую изъ двухъ дробей $\frac{4}{9}$ и $\frac{9}{20}$ одинъ разъ для удостовѣренія, что равенство между ними невозможно. Но можетъ случиться, что потребуется нѣсколько такихъ обращеній. И въ этомъ общемъ случаѣ заключеніе о неравенствѣ разсматриваемыхъ дробей будетъ такъ же просто. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ требуется доказать, что двѣ несократимыя дроби $\frac{11}{49}$ и $\frac{24}{107}$, въ которыхъ знаменатели 49 и 107 суть числа взаимно-простыя, не могутъ быть равны между собою. При равенствѣ ихъ, получили бы

$$\frac{11}{49} = \frac{24}{107},$$

и замѣтивъ, что числители 11 и 24 не имѣютъ никакого общаго дѣлителя, нашли бы по обращеніи

$$\frac{49}{11} = 4 + \frac{5}{11}, \quad \frac{107}{24} = 4 + \frac{11}{24},$$

а отсюда

$$\frac{5}{11} = \frac{11}{24}.$$

Такимъ образомъ мы получили двѣ новыя дроби $\frac{5}{11}$ и $\frac{11}{24}$, съ членами соотвѣтственно мѣньшими, чѣмъ въ первоначальныхъ $\frac{11}{49}$ и $\frac{24}{107}$, и удовлетворяющія тѣмъ же самымъ условіямъ, какъ и данныя, именно: 1° дроби $\frac{5}{11}$ и $\frac{11}{24}$ несократимы; 2° знаменатели ихъ 11 и 24 числа взаимно-простыя и 3° числители 5 и 11 также взаимно-простые; еслибъ, въ другомъ примѣрѣ, числители имѣли общій дѣлитель, то чрезъ раздѣленіе на него, дроби привелись бы къ требуемому виду.

На такомъ основаніи продолжаемъ дѣйствіе надъ дробями, уже болѣе простыми, $\frac{5}{11}$ и $\frac{11}{24}$. Найдемъ

$$\frac{11}{5} = 2 + \frac{1}{5} \quad \text{и} \quad \frac{24}{11} = 2 + \frac{2}{11},$$

откуда

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{11}, \quad \text{или} \quad \frac{11}{2} = 5.$$

Здѣсь непосредственно обнаруживается невозможность предположеннаго равенства, потому что мы дошли до дроби, имѣющей числителемъ единицу. Дѣйствительно, такъ какъ дробь $\frac{2}{11}$, а слѣдовательно и $\frac{11}{2}$ несократима, то и заключаемъ, что $\frac{11}{2}$ не можетъ равняться цѣлому числу 5, а поэтому $\frac{11}{5}$ дроби $\frac{24}{11}$, далѣе $\frac{49}{11}$ дроби $\frac{107}{24}$, а отсюда уже прямо слѣдуетъ невозможность равенства $\frac{11}{49} = \frac{24}{107}$.

Такъ какъ производимое здѣсь дѣйствіе надъ несократимою дробью тожественно съ тѣмъ, посредствомъ котораго опредѣляется общій наибо́льшій дѣлитель, и какъ разсматриваемыя числа взаимно-простыя, то всегда дойдемъ до дроби, имѣющей числителемъ *единицу* (Отдѣлъ IV, § 72). Съ другой стороны мы уже замѣтили, что послѣ каждаго изъ соотвѣтственныхъ обращеній двухъ дробей, новые знаменатели могутъ быть приведены къ числамъ взаимно-простымъ; слѣдовательно, когда произведемъ одинакое число обращеній съ отдѣленіемъ цѣлыхъ чиселъ надъ первоначальными двумя дробями, и дойдемъ до дроби, имѣющей числителемъ *единицу*, то этой дроби будетъ соотвѣтствовать другая, съ числителемъ отличнымъ отъ *единицы*, потому что знаменатели у двухъ дробей различные. Но такія двѣ дроби, какъ уже показано выше, не могутъ быть равны, почему и первоначальныя также различны между собою, что́ и имѣли въ виду доказать.

Это свойство дробей, имѣющихъ взаимно-простые знаменатели, равнозначуще съ слѣдующимъ *Предложеніемъ*:

Предложеніе. *Произведеніе нѣсколькихъ множителей не можетъ дѣлиться на́-цѣло на число, простое съ каждымъ изъ нихъ.*

Положимъ, напримѣръ, требуется доказать, что произведеніе двухъ чиселъ 9 и 15 не можетъ дѣлиться на 22, зная что 22 не имѣетъ никакихъ общихъ дѣлителей съ 9 и 15; если допустимъ дѣлимость, то получимъ

$$\frac{9.15}{22} = \text{цѣлому числу},$$

откуда

$$\frac{9}{22} = \frac{\text{цѣлому числу}}{15}.$$

Замѣтимъ теперь, что первая изъ этихъ двухъ дробей, по сдѣланному предположенію, несократимая; вторую же, если нужно, сократимъ мысленно. Тогда найдутся двѣ дроби, съ знаменателями взаимно-простыми, и которыя поэтому, какъ доказано выше, не могутъ быть равны между собою; слѣдовательно, предположенная дѣлимость невозможна.

При трехъ или бо́льшемъ числѣ множителей, доказательство остается тò же самое. Положимъ, желаемъ доказать, что произведеніе трехъ чиселъ 7, 9 и 15 не можетъ дѣлиться на 22, зная, что 22 не имѣетъ никакихъ общихъ дѣлителей съ 7, 9 и 15. Допустивъ противное, получили бы

$$\frac{7.9.15}{22} = \text{цѣлому числу},$$

откуда

$$\frac{9.15}{22} = \frac{\text{цѣлому числу}}{7}.$$

Такъ какъ 9.15, въ слѣдствіе уже доказаннаго, не дѣлится на 22, то $\frac{9.15}{22}$ будетъ настоящая дробь; слѣдовательно и вторая часть равенства изобразится дробью; но какъ эти двѣ дроби имѣютъ знаменателями числа взаимно-простыя, то онѣ не могутъ быть равны между собою, а поэтому нельзя допустить, чтобы произведеніе 7.9.15 дѣлилось на 22.

Таблица

простыхъ чиселъ отъ 1 *до* 2039.

1	127	293	487	683	907	1109	1327	1571	1801
2	131	307	491	691	911	1117	1361	1579	1811
3	137	311	499	701	919	1123	1367	1583	1823
5	139	313	503	709	929	1129	1373	1597	1831
7	149	317	509	719	937	1151	1381	1601	1847
11	151	331	521	727	941	1153	1399	1607	1861
13	157	337	523	733	947	1163	1409	1609	1867
17	163	347	541	739	953	1171	1423	1613	1871
19	167	349	547	743	967	1181	1427	1619	1873
23	173	353	557	751	971	1187	1429	1621	1877
29	179	359	563	757	977	1193	1433	1627	1879
31	181	367	569	761	983	1201	1439	1637	1889
37	191	373	571	769	991	1213	1447	1657	1901
41	193	379	577	773	997	1217	1451	1663	1907
43	197	383	587	787	1009	1223	1453	1667	1913
47	199	389	593	797	1013	1229	1459	1669	1931
53	211	397	599	809	1019	1231	1471	1693	1933
59	223	401	601	811	1021	1237	1481	1697	1949
61	227	409	607	821	1031	1249	1483	1699	1951
67	229	419	613	823	1033	1259	1487	1709	1973
71	233	421	617	827	1039	1277	1489	1721	1979
73	239	431	619	829	1049	1279	1493	1723	1987
79	241	433	631	839	1051	1283	1499	1733	1993
83	251	439	641	853	1061	1289	1511	1741	1997
89	257	443	643	857	1063	1291	1523	1747	1999
97	263	449	647	859	1069	1297	1531	1753	2003
101	269	457	653	863	1087	1301	1543	1759	2011
103	271	461	659	877	1091	1303	1549	1777	2017
107	277	463	661	881	1093	1307	1553	1783	2027
109	281	467	673	883	1097	1319	1559	1787	2029
113	283	479	677	887	1103	1321	1567	1789	2039

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Напечатано:	*Страница:*	*Строка:*	*Должно быть:*
изобразитъ	9	13 снизу	изобразить
нмъ	12	6 снизу	ихъ
$\frac{1}{15}$	57	7 сверху	$\frac{10}{15}$
$1176=2^3.3.7$,	75	11 сверху	$1176=2^3.3.7^2$,
$\frac{153}{495}=\frac{17}{35}$.	80	11 сверху	$\frac{153}{495}=\frac{17}{55}$.
$\frac{2979}{25400}$	92	2 сверху	$\frac{2079}{25400}$
зотот.	130	2 сверху	золот.
съ	131	11 снизу	въ
$\frac{1}{3,32.40}$	132	6 сверху	$\frac{1}{2.32.40}$

На страницѣ 136 (строка 11 сверху) слѣдующій пропускъ:

Вмѣсто: и удержанная 1 = 97 фун. =

Должно быть: и удержанная 1 = 55 лот. = 1 фун. + 23 лот.; пишемъ 23 лота, и продолжаемъ: 23 + 37 + 36 + удержапный 1 фун. = 97 фун. =

1399,1225	156	1 сверху	1399,0725

На страницѣ 162 (строка 5 снизу), вмѣсто 1, которою оканчивается съ правой стороны діадическое число, долженъ быть 0.